산업수학 문제해결 역량강화 및 저변확산을 위한 활동 연구

(Study on the innovation of problem solving system and proliferation for mathematics in industry)

대한수학회

＊ ＊ ＊

미 래 창 조 과 학 부

제 출 문

미래창조과학부장관 귀하

본 보고서를 "산업수학 문제해결 역량강화 및 저변확산을 위한 활동연구" 과제의 최종 보고서로 제출합니다.

2017. 4. 26

주관연구기관 : 대한수학회
연 구 기 간 : 2016. 5. 1 ~ 2017. 1. 31
연구책임자 : ***　(인)
연 구 원 : ***　(인)
***　(인)
***　(인)
***　(인)
***　(인)
***　(인)
***　(인)
***　(인)
***　(인)
***　(인)
***　(인)
***　(인)
***　(인)
***　(인)
***　(인)
***　(인)
***　(인)

연구보조원 : ***　(인)

연구목표와 연구수행결과의 비교 분석표

연구목표	연구수행결과
정부 R&D 계획 및 전략 수립단계에서 수학자도 참여하는 전문가 풀 제공	○ 산업기술 특성을 반영한 산업수학 17개 분류(2015.5)별 분야별 상위 10인 전문가 명단 (논문 기여지수 합) 제공 ○ 미래부 10대 산업분야 (119개 국가전략기술) 전문가 설문응답자 명단 제공 ○ 산업기술 플랫폼(9/34)별 델파이분석 응답자 명단 제공
사회적 이슈에서 발견되는 수학적 원리를 발굴하고 공공분야 전문가들과 함께하는 공공프로젝트 위원회 구성	○ 대한수학회가 위촉한 산업수학 관련 산학연 전문가로 구성된 "산업수학 공공프로젝트 위원회" 제안 ○ 산업수학센터 (Industrial Mathematics Center, IMC)에서 공공프로젝트 위원회의 역할 규정 ○ 산업수학 공모과제에서 공공프로젝트 위원회의 역할 규정
문제발굴을 위한 산학 라운드테이블 프로그램 활성화	○ 4회에 걸친 라운드테이블 미팅 개최
문제해결 워크숍 개최	○ 2회에 걸친 문제해결 워크숍 개최
인재양성 시스템 연구	○ 학부에서의 커리큘럼 개편 필요성 제시 ○ 대학원 교육과 새로운 교육과정의 대안 제시: 전문과학석사(PSM) ○ COMAP (Consortium for Mathematics and Its Applications)의 "For All Practical Purposes"와 미국수학회의 "수학이 빛나는 순간(Mathematical Moments)"을 참조하여 산업수학의 커리큘럼 방향 제시

목 차

제1장 연구의 필요성과 중요성 1

제1절 지능정보사회 - 과거 산업혁명에 대한 고찰과 미래 변화에 대한 준비 1

제2절 기술변화가 가져오는 사회적 영향 5

제3절 Some keywords 5

제2장 전략 수립 분야 10

제1절 산업수학센터 (Industrial Mathematics Center, IMC) 10

1) 기능 및 역할 10

제2절 IMC 기획(안) 11

1) 사업 개요 11

2) 공모 신청 13

3) 평가 절차 및 기준 13

4) 연구 관리 14

제3절 산업수학센터 운영방안 토론회 (2016.09.23) 15

1) 토론회 개요 15

2) 토론회 취지 및 기대효과 15

3) 프로그램 16

4) 발제 주제 및 순서 16

제4절 산업수학 공모과제 17

제5절 산업수학 전문가 Pool 20

1) 산업기술 특성을 반영한 산업수학 17개 분류(2015.5)별 전문가 집단 20

2) 미래부 10대 산업분야 (119개 국가전략기술 전문가 설문응답자(93명) 22

3) 산업기술 플랫폼(9/34)별 델파이분석 응답자(93명) 명단 23

제3장 문제발굴 분야 (라운드 테이블) 26

제1절 라운드 테이블 I 26

1) PSSE 프로그램 26
2) 그리드 시스템 27
3) 연구계획 28
제2절 라운드 테이블 II 29
1) 의료 빅데이터의 판독 및 응용 사례 소개 29
2) 의료 빅데이터의 활용에 관한 문제점 29
3) 의료계의 수요 전망 29
4) 산업수학 측면에서 역할 30
5) 앞으로 추진 방향 30
6) 결론 30
제3절 라운드 테이블 III 31
제4절 라운드 테이블 IV 31
1) 개요 31
2) 프로그램 32
3) 주요논의 사항 32

제4장 문제해결 분야 (문제해결 워크숍) 36
제1절 들어가기 36
제2절 제1차 문제해결 워크숍 (라운드 테이블 III의 문제해결) 37
1) 모더레이터(Moderator) : *** 교수 37
제3절 제2차 문제해결 워크숍 (라운드 테이블 II의 문제해결) 43
1) 모더레이터(Moderator) : *** 박사 43
2) (주)타키온테크 문제소개 44
3) (주)타키온테크 문제해결 45
4) 모더레이터(Moderator) : *** 교수 49
5) 블리 문제해결 49
제4절 해외 문제해결 사례 51
1) 해외 산업수학 문제해결 워크샵의 결과로 도출된 산업문제 해결 사례 51
2) 최근 해외 산업수학 문제해결 워크샵에서 제시된 산업문제들 52
제5절 산업수학 간행물 발간 55

제5장 산업수학 Curriculum 56

제1절 들어가기 56
제2절 학부에서의 커리큘럼 개편 필요성 56
제3절 대학원 교육과 새로운 교육과정의 대안: 전문이학석사(PSM) 56
1) PSM의 정의 57
2) PSM의 역사 57
3) 수리과학 분야에서의 PSM 프로그램의 특징 57
4) 미래수학 전문인력 양성을 위한 교육혁신의 필요성 58
5) PSM 교육과정사례들 58
6) 국내에서의 수학 전문이학석사(PSM)의 도입 가능성 59
7) 산학협력을 위한 프로그램 59
8) 국내 대학의 산업수학 커리큘럼 주요 내용 현황 60
제4절 새로운 교육과정의 대안(예) 64
1) 사이언티픽 컴퓨팅 6학점 64
2) 수치 선형대수학 3학점 64
3) 통계 3학점 응용수리통계 및 데이터 분석 64
4) 응용해석학의 방법론 3학점 64
5) 최적화 이론 3학점 64
6) 이산수학 3학점 64
7) 응용 분야 강좌 9학점 64
8) 인턴십 65
9) 의사소통 능력 65

제6장 교과서 개발 분야 (산업수학 교과서) 66
제1절 미래 수학교육이 추구하는 목표 66
제2절 수학학습 내용 추출의 배경 66
1) 일반적 수학 지식 사용자를 위한 학습내용 분류 예시 69
제3절 수학을 사용하는 방법 70
1) 전문적 수학 지식 사용자를 위한 학습 내용 분류 예시 83
2) 데이터 분석과 관련된 학습 내용 85
3) 모델링과 관련된 학습 내용 88
4) 미래세대를 위한 교과서 95
제4절 대학 교육과 연계하여 96

1) 대학 수학에 연계된 제언 98
2) 새로운 수리과학 내용과 관련된 일본의 제언 100
제5절 산업수학에 적합한 수학 학습 내용 101
1) 산업수학에 적합한 수학 학습 내용으로서의 이산수학 101
2) 산업수학에 적합한 수학 학습 내용으로서의 기하 105
3) 산업수학에 적합한 수학 학습 내용으로서의 통계학과 데이터과학 . . 111
4) 산업수학에 적합한 수학학습 내용으로서의 모델링 114
5) 산업수학에 적합한 수학학습 내용으로서의 컴퓨터 활용(미국 학술원 보고서(NRC, 2010)를 중심으로) 119
제6절 산업수학: 초·중등 수학 교육 방안 126
1) 이산수학 126
2) 산업수학 교과서: 금융수학 129
3) 산업수학 교과서 133
4) 산업수학 교과서 : 데이터과학 134
5) 산업수학 교과서: 계산적 사고력 135
제7절 산업수학 교과서 학습 내용으로 적합한 예들 : 수학이 빛나는 순간 . 139
제8절 산업수학 교과서 학습 내용에 적합한 예들: 응용수학 분야 목차 모음-Princeton Companion to Applied Mathematics 201

제7장 요약 및 결론 203

참고문헌 207

부록: 실용수학 교재개발 분야-프로젝트 문제 샘플 217
제1절 샘플 문제 1. 세라믹 콘덴서 제조 217
1) 프로젝트 개요 217
2) 배경 정보 개요 217
3) 상세한 배경 정보 218
4) 생각할 문제 219
제2절 샘플 문제 2. 콘덴서용 세라믹 가루 220
1) 프로젝트 개요 220
2) 배경 정보 220
3) 프로젝트 목표 221

4) 생각할 문제 221

표 목차

〈표 2.2〉 주요 기능 및 역할 11
〈표 2.3〉 추진 일정 : ※ 상기 일정은 변경 가능 13
〈표 2.4〉 산업수학센터 운영방안 토론회 프로그램 16
〈표 2.5〉 산업기술 특성을 반영한 산업수학 17개 분류(2015.5)별 전문가 집단: 참고1. 산업기술별-수학분야-분류방안 (2015.6.5.) 20
〈표 2.6〉 산업기술 특성을 반영한 산업수학 17개 분류(2015.5)별 전문가 집단 21
〈표 2.7〉 미래부 10대 산업분야 (119개 국가전략기술 전문가 설문응답자(93명) : 참고2. 산업수학-10대산업전문가-델파이분석 (2015.6.) 22
〈표 2.8〉 참고3. 산업수학 기술플랫폼 : 클러스터9-플랫폼34-상품123.pptx (2015.7.) 23
〈표 2.9〉 산업기술 플랫폼(9/34)별 델파이분석 응답자(93명) 명단: 참고2. 산업수학-10대산업전문가-델파이분석 (2015.6.) 25

〈표 4.2〉 해외 산업문제 해결 사례 52

〈표 6.1〉 대표적 일반 현실 문제와 이에 필요한 수학 82
〈표 6.2〉 중등 수학교육과정의 수학 학습 내용 대분류 84
〈표 6.3〉 수학의 기본적 응용에 활용되는 수학 내용 (대학 수준까지) 85
〈표 6.4〉 데이터 분석의 전 과정의 도식화 86
〈표 6.5〉 공의 높이를 재서 만든 표 90
〈표 6.7〉 인문·사회계 학생들을 위한 몇 가지 프로젝트 사례 138

그림 목차

〈그림 3.1〉마케팅(불쏘시게)과 품질의 중요성(장작)의 균형을 수식으로 표현 . 34

〈그림 6.1〉던져진 공 사진 (눈금은 10cm) 90

〈그림 6.2〉글꼴 디자인: G. Farin의 책에서 93

〈그림 6.3〉데이터 표현 2 (Boxplot). 109

제1장 연구의 필요성과 중요성

제 1 절 지능정보사회 - 과거 산업혁명에 대한 고찰과 미래 변화에 대한 준비

18세기 말 증기기관과 방적기의 보급으로 영국에서 촉발된 1차 산업혁명 이후, 19세기 말 미국에서 전기와 컨베이어 벨트에 의한 대량생산이 보편화된 2차 산업혁명을 넘어, 20세가 말 컴퓨터를 통한 정보화와 생산자동화를 기초로 한 3차 산업혁명까지, 200년간에 걸친 산업혁명은 우리의 삶을 크게 바꾸어 왔다. 최근 고도화된 소프트웨어를 탑재한 기계의 등장과 주변의 사물정보를 인지하는 인공지능의 발전 은 4차 산업혁명의 서막을 알리는 신호로 간주된다. 과거 산업혁명의 특징을 살펴 보고 산업구조의 변혁이 몰고 온 정치경제적 변화를 고찰함으로써 미래의 변화를 예측하는 것은 21세기를 살아가는 우리에게 필수적인 생존전략일 것이다.

1차 산업혁명은 인력이나 축력 등 매우 제한적인 동력원을 위주로 하던 가내수공업에서 증기기관이라는 새롭고 강력한 동력원으로 이용함으로써 공업의 기계화를 달성한 사건이었다. 이러한 근대 공업화에 먼저 성공한 국가는 원료의 공급과 제 품의 수요를 창출하기 위해서 식민지를 개척할 필요가 생겼다. 1차 산업혁명은 경제적으로는 생산력 향상을 통하여 인류에게 잉여생산이 가능한 사회로의 진입 이라는 긍정적 효과를 제공하였지만, 정치적으로는 산업혁명에 뒤처진 국가를 예속화하는 제국주의와 생산시설을 소유하지 못한 빈민층을 양산하는 병폐를 함께 가져왔다. 이러한 계급과 국가들 사이의 종속적 관계를 크게 변화시킨 것은 19세기 말에서 20세기 초에 진행된 2차 산업혁명이었다.

2차 산업혁명은 동력원이 단순히 외연 혹은 내연기관에서 전기로 바뀐데 국한되지 않는다. 전기는 동력원으로써 뿐만 아니라 열원, 광원, 화학적 반응원 등 다양한 형태로 활용가능하다. 따라서 전기를 이용하면 모든 화학적, 물리적 작업을 일관된 공정을 통해 한 곳에서 손쉽게 완성할 수 있는 여건이 마련된다. 여기에 헨리 포드가 도입한 컨베이어 벨트와 같은 공정화를 도입하면 비로소 대량생산과 대량 소비가 가능해진다. 대량생산은 1, 2차 세계대전과 같은 인류사 최악의 대규모 전쟁을 불러오기도 하였지만, 풍요한 사회를 기반으로 하는 민주주의를 이룰 수 있는 토대를

마련하였다. 인류는 개발도상국도 선진국의 경제 풍요를 기반으로 하는 정치적 민주화를 이상으로 하여 발전할 수 있고, 가난한 자도 시간이 지남에 따라 더 나은 삶을 영위할 수 있다는 희망을 가지게 되었다.

3차 산업혁명은 물질적 풍요의 한계와 저성장을 경험한 선진국을 중심으로 20세기 말 진행된 변화이다. 물질적 생산과 소비는 20세기 후반에 들어서면서 과잉생산과 신흥시장 위축으로 한계를 맞이하게 된다. 3차 산업혁명은 정보의 디지털화를 통해 지식, 멀티미디어, 개인정보 등 모두가 실시간 처리되는 정보통신 기술혁신에 기반하고 있다. 통신의 발전을 통해 세계를 하나로 묶는 지구촌 시대와 지식정보화를 통한 비물질적 재화가 경제의 중심이 되는 사회로의 이행이 3차 산업혁명의 핵심이 된다. 미시적 관점에서 개인은 정보취득자와 정보생산자로서의 역할을 가지게 되었고, 거시적으로는 금융, 미디어, 게임 등의 신산업이 발전하고 지속가 능한 발전을 위한 지구환경 대한 관심 증가하는 양상을 보여주었다. 3차 산업혁명은 개개인의 의사가 존중되는 개인미디어의 등장, 세계화를 통한 제3세계의 민주화 등의 순기능이 있는 반면 정보의 독점과 지식정보산업의 확장을 통한 부의 집중 화와 같은 부작용을 가져왔다.

4차 산업혁명은 모든 사물이 네트워크에 연결되어 실시간 정보를 수집하고, 수집된 정보는 인공지능에 의해 분석되며, 인공지능의 판단에 따라 기계가 자동으로 대응하는 완전한 정보처리기술을 기반으로 하고 있다. 4차 산업혁명이 우리사회에 어떠한 변화를 가져올지는 아직 속단하기 어렵다. 다만 공업화라는 물질세계의 변화가 1차 산업혁명을 기점으로 촉발되어 2차 산업혁명에 의해 완수되었듯이, 지식 정보화가 3차 산업혁명을 시작으로 하여 4차 산업혁명에 의해 우리에게 새로운 미래를 열어줄 것임을 짐작해 볼 수 있을 것이다. 이제 막 시작한 4차 산업혁명의 기술적 기반을 살펴보고 미래의 변화를 대비하는 것이 미지의 세계를 준비하는 우리에게 필요한 자세라 생각된다.

이제 4차 산업혁명의 기술적 기반을 살펴봄으로써 다가올 미래의 변화를 예측해 보고자 한다. 우선 사물인터넷기술(IoT)은, 기존의 정보생산이 인간 중심으로 시간적으로나 공간적으로 한계가 있었던데 반해, 모든 사물이 인터넷에 연결되어 실시간 다양한 정보를 지속적으로 생산하는 환경을 제공해 준다. 우리 동네 기상 변화, 도로 위의 차량 움직임에서, 집안 냉장고 속의 음식물까지 모든 정보가 실시간 취합되고 해석되는 기반이 제공된다. 둘째, 취합되는 정보는 양적으로나 질적으로 더 이상 개개인의 수동적 조작에 의해 처리될 수 있는 한계를 넘어서게 됨에 따라, 이를

자동으로 처리할 인공지능(AI)이 발전하게 된다. 인공지능은 과거 정보통신 기기가 인간의 지적활동의 보조적 역할을 담당하는데 그치지 않고, 새로운 여러 영역에서 인간을 대치할 것이다. 생산에 있어서도 3D 프린팅 기술과 스마트 펙토리 (Smart Factory)는 대량 소품종 생산체제를 벗어나 개개인의 욕구에 부응하는 소량 다품종 생산을 가능하게 될 것이다. 여기에 인공지능과 같은 제어체계가 결합하면 인간 활동의 모든 영역에서 기계와 인간이 공존하는 세계가 열릴 것이다. 정보 수집, 정보해석, 생산자동화 이 모든 구성요소가 인간의 활동과 융합되어 병존하게 될 때, 우리는 비로소 진정한 의미의 지능정보화사회를 구현할 수 있을 것이다.

올바른 지능정보사회를 선도하기 위해서는 기존 산업체계와 이를 뒷받침하는 교육, 연구체계의 개편을 필요로 한다. 기존 산업혁명은 과학적 지식을 공학적으로 구현함으로써 발전하였다. 이를 효율적으로 구현한기 위해서 증기기관과 자동차를 만드는 기계공학, 비행기를 만드는 항공공학, 플랜트 건설을 위한 화학공학, 전자제품을 만드는 전자공학 등등과 같은 수많은 공학이 별도로 존재하여 왔고, 이들 각각의 공학 분야에서 요구되는 지식을 제공하는 것이 연구의 핵심이었다. 그러나 제조 기법이 아니라 디지털 정보처리가 산업의 핵심이 되는 4차 산업혁명이 진행되는 오늘날 파편화된 기존의 공학으로는 새로운 산업혁명을 주도할 수 없다. 정보가 일단 디지털화되어지면 그 정보가 기상정보인지 금융정보인지 아니면 개인정보인지를 가리지 않고 복합적으로 처리되어질 수 있다. 따라서 4차 산업혁명의 성공여부는 다양한 정보를 어떻게 융합하여 보다 유용한 정보로 변화시킬 수 있느냐에 좌우된다고 하겠다. 과거 우리나라는 선진국의 발전된 기술을 가능한 빨리 습득하고 효율화시킴으로써 질 좋은 생산품을 싸게 만들어 내는 빠른 추종자 (Fast Follower)의 역할을 수행하여 왔다. 그러나 오늘날 4차 산업혁명의 선도자 (First Mover)가 되기 위해서는 모든 과학과 기술을 통합할 수 있는 융합적 사고를 가진 교육과 연구를 필요로 한다. 우리가 고민하는 지식정보화사회를 구축하기 위한 교육과 연구의 핵심을 찾기 위해서는 ‘오늘날 다양화된 모든 과학과 기술을 통합하는 융합적 사고의 기반이 과연 무엇일까’라는 질문을 생각해 보아야 할 것이다.

1차 산업혁명의 원동력이 된 역학의 발전은 미적분학의 발견에 기인하였으며, 2차 산업혁명의 핵심에 위치한 전자기학은 미분방정식에 대한 이해 없이는 발전될 수 없었다. 이렇듯 1차에서 2차 산업혁명으로 이어지는 물리학, 화학 및 많은 공학적 발전은 기본적으로 수학적 기술을 통해 정교화 정량화되어졌다. 3차 산업혁명을 가능하게 한 컴퓨터의 계산이론도 모두 20세기 초 수학자들에 의해 개척

되어진 분야이고, 최근 새롭게 주목받고 있는 인공지능도 이미 그 기반이 되는 수학적 배경은 1990년대 활발한 연구가 있어왔던 분야이다. 이와 같이 오늘날 모든 과학과 공학은 기본적으로 수학을 공통의 근간으로 하고 있고, 4차 산업혁명의 근본이 되는 지식정보처리도 결국 수학적 방법론을 통해 발전해 나갈 것이다. 작은 물고기의 움직임, 비행기의 항행, 기상 현상 등등 현상적으로는 모두 달리 보이는 분야라 하더라도 수학적으로는 모두 같은 형태의 방정식에 의해 기술될 수 있다. 이와 같은 다양한 분야를 통합하는 방법으로서의 수학은 오늘날 다양화된 과학과 기술을 통합하는 핵심적 도구이자 융합적 사고의 기반이라 할 수 있다. 이렇듯 수학은 과학기술의 발전을 매개로 하여 산업의 혁신을 이끌어 왔고, 오늘날 과학과 기술 의 근간을 이루고 다양한 분야를 통합하는데 수학이 핵심적 역할을 한다는 점은 우리 모두가 공 하는 바이다. 탄탄한 수학적 기반이 없는 4차 산업혁명은 사상 누각의 위험성을 가지고 있다고 하겠다.

수학이 이제까지 과학기술의 발전을 매개로 산업발전에 간접적으로 기여한데서 한 걸음 더 나아가, 이제는 직접적으로 4차 산업혁명의 주도적 역할을 직접적으로 담당할 것이다. 기상정보, 금융정보, 멀티미디어정보, 개인정보를 모두 통합된 방식으로 이해하고 이를 분석 처리하는 방법은 이제까지 어떤 독립된 과학이나 공학 분야에서도 다루지 않은 문제이며, 본질적으로 추상화와 정량화가 핵심이므로 수학적 방법론이 필요한 분야이다. 따라서 지식정보화 사회에서의 문제해결력과 4차 산업혁명의 원동력은 새로운 수학적 방법을 통해 얻을 수 있을 것이다. 다양한 영역에서 시도되고 있는 인공지능을 더욱 발전시키기 위해서는 단순한 경험적 방법론이 아닌 보다 체계적이고 고도화된 수학적 방법론의 발전이 필요할 것이다. 수학은 늘 새로운 가능성에 대한 시도였고 수학의 발전이 새로운 산업혁신을 가져 왔다는 역사적 교훈을 바탕으로 오늘날 4차 산업혁명에 있어서도 수학은 필수불 가결한 요소를 이해되어진다.

오늘날 한국사회는 높은 교육열과 결집된 추진력으로 단기간에 다양한 분야에서 괄목할만한 성취를 이루어내었다. 새로운 산업혁명이 시작되는 이 시점에 온 국민이 새로운 시대에 대한 긍정적 목표를 설정하고 교육과 문화 등 다방면에서 발 빠른 대처를 한다면, 4차 산업혁명은 부존자원이 부족하지만 인적자원이 풍부한 우리사회에 새로운 도약의 기회를 제공해 줄 것이다. 4차 산업혁명의 정확한 모습과 이를 통한 인류 사회의 변화를 예측하는 것은 변화의 시작점에 선 우리로서는 다소 무리가 있어 보인다. 그러나 3차 산업혁명이 완성되고 무형의 지식정보와 유형의 사물이 유기적

으로 융합된 모습으로 우리의 삶을 바꿀 것이라는 데에는 큰 이견을 없을 것이다. 이러한 변화가 지식정보의 독점과 극심한 양극화로 치닫지 않게 만들기 위해서는 우리 모두 미래를 위한 능동적 대처능력을 키우고, 기술 발전이 모든 구성원이 인간다운 삶을 영위하기 위해 적극적으로 노력하여야 할 것이다. 그렇게 할 때만이 4차 산업혁명이 개인의 행복, 국가의 발전, 인류의 공영이라는 밝은 미래를 약속할 것이다.

제 2 절 기술변화가 가져오는 사회적 영향

· 기술변화는 모든 사람에게 동일한 결과를 가져다주지 않는다.

- 자동화 결과, 20년까지 500만개 일자리 감소
- 기계가 미숙련 일자리 대체, 단순노동의 경우 일자리 양극화 심화
- 자본이 노동보다 더 큰 몫을 차지
- 재능이 뛰어난 소수에 의한 부의 독점
- 많은 인력(단순노동) → 많은 수익: 1-3차 산업혁명

  적은 인구(지식인) → 많은 수익: 4차 산업혁명

  ⇒ 중산층 붕괴 + 민주주의 훼손 (Klaus Schwab, 경제학자, 다보스포럼 창립자)

· 기본소득(노동. 재산과 상관없이 모든 국민들에게 무조건 지급하는 소득) 논쟁

· 변혁의 소용돌이에서 살아남으려면 규제 장벽을 허물고, 새로운 환경에 대처할 인재를 배출하기 위한 교육개혁이 필수적이다.

제 3 절 Some keywords

- 빅데이터
  - 디지털 환경에서 생성되는 다양한 형태의 데이터를 의미하며 그 규모가 방대 하고 생성 주기도 짧은 대규모의 데이터를 의미
- 사물인터넷(IoT, Internet of Things),
  - 사물인터넷이라고도 하며, 사물에 센서가 부착되어 실시간으로 데이터를 인터넷 등으로 주고받는 기술이나 환경을 의미
  - IoT가 도입된 기기는 사람의 개입 없이 상호간 정보를 직접 주고받으면서, 필요 상황에 따라 정보를 해석하고 스스로 작동하는 자동화된 형태

- 증가한 데이터의 양을 바탕으로 사람들의 행동 패턴 등을 분석 및 예측할 수 있고, 이를 산업 현장에 활용할 경우 시스템의 최적화 및 효율화 등이 가능

• 인공지능(AI, Artificial Intelligence)
  - 컴퓨터가 사고, 학습, 자기계발 등 인간 특유의 지능적인 행동을 모방할 수 있도록 하는 컴퓨터공학 및 정보기술의 한 분야
  - 단독적으로 활용되는 것 외에도 다양한 분야와 연결하여 인간이 할 수 있는 업무를 대체하고, 그 보다 더욱 높은 효율성을 가져올 것으로 기대가 가능

• 가상현실(VR, Vertual Reality)

• 증강현실(AR, Augmented Reality)

• 혼합현실MR, Mixed Reality)
  - 예) 포켓몬GO
  - VR, AR 기술의 활용 시장: 게임 산업, 제조, 의료/헬스케어, 교육, 미디어, 건축, 디자인 등 가상훈련시스템(시뮬레이터)은 이미 제조 국방 부문의 중 장비 훈련 산업에서 출발하여 의료, 스포츠, 여가, 재난 대응 산업까지 영역을 확대하고 있음
  - 2016년이 VR, AR의 원년, 2017년의 키워드는 '대중화': 가상현실(VR) 기기가 스마트폰처럼 대중화될 것으로 기대
  - VR, AR 보급 활성화를 위해 해결해야 할 과제
    * 디바이스 분야에서는 저렴한 가격, 하드웨어의 조악함, 어지러움증 등이 우선 해결 과제
    * 실패한 3D TV를 교훈삼아 콘텐츠의 확대도 선제적으로 챙겨야 할 분야
    * 완전한 VR 콘텐츠 재현을 위해서는 네트워크 고도화 필수적
    * 구글글래스와 같은 사용자의 사생활에 대한 우려, 성인용 콘텐츠와 관련된 윤리적 논란에 대해서도 대응 방안을 철저히 검토, 준비해야 함
  - 국가 육성정책
    * 2015년에 발표된 19대 미래성장동력(산업엔진) 프로젝트에 가상현실 (VR)기술이 포함된 실 형 콘텐츠, 가상훈련시스템(시뮬레이터) 등을 포함
    * 2017년 2월부터 본격적으로 추진되는 9대 국가전략 프로젝트에도 가상, 증강현실 선정
  - 혼합현실 (MR): 현실 배경 위에 현실과 가상의 정보를 혼합하는 기술

* 예) MS의 ‘홀로렌즈(HoloLens)’, 인텔의 ‘프로젝트 알로이(Project Alloy)’
* 참고서적: “가상현실 증강현실 혼합현실 활용분야별 비즈니스 현황과 최근 주요 이슈 종합분석” ISBN : 978-89-98207-44-1

• 산업 인터넷 (Industrial Internet)
  - 제품 진단 소프트웨어와 분석 솔루션을 결합해 기계와 기계, 기계와 사람, 기계와 비즈니스 운영을 서로 연결시켜 기존 설비나 운영체계를 최적화하는 차세대 기술
  - 병원의 MRI(자기공명영상진단) 장비, 발전소의 가스터빈, 제트기 엔진 등 수많은 기계들은 끊임 없이 방대한 양의 데이터를 생성해내고 있다. 산업 인터넷은 똑똑한 기계들이 스스로 데이터를 공유하고 분석해 관리자에게 의미있는 정보를 제공하고, 효과적인 의사결정을 돕는다. 이를 통해 항공, 철도, 헬스케어, 제조 및 에너지 등 다양한 산업의 생산성과 효율성이 크게 높아질 것으로 기대됨
  - 예) GE의 산업인터넷 기술: GE는 항공, 철도, 병원, 제조 및 에너지 기업들의 운영 효율성 제고와 비용절 을 목표로, 네트워크 최적화, 공장 및 시설 최적화, 자산 최적화, 서비스 품질 및 생산성 등 네 가지 유형에서 다양 한 산업인터넷 서비스를 선보이고 있음

    ⇒ 풍력발전소는 더욱 친환경적으로 전력을 생산하고, 항공기의 연료 소비를 절 했으며, 의사는 불필요한 검사를 줄이면서 환자를 더욱 정확하게 진단함

    ⇒ 고용과 경제성장을 모두 촉진함
  - 산업인터넷의 경제적 가치가 소비자인터넷의 가치를 뛰어넘을 것으로 예상

• 합성생물학 (Synthetic Biology)
  - 생명과학적 이해의 바탕에 공학적 관점을 도입한 학문으로 자연 세계에 존재하지 않는 생물 구성요소와 시스템을 설계 제작하거나 자연 세계에 존재하는 생물 시스템을 재설계 제작하는 두 가지 분야를 포괄
  - 생물정제

    생물정제(Refinery)는 여러 물질들이 섞여있는 것으로부터 순수한 물질을 추출 하거나 다양한 용도로 물질을 만들어 내는 정유사의 석유정제와 유사한 방법으로 바이오매스(Biomass)를 처리하는 개념
  - 바이오 에너지

유가급등과 석유자원 고갈, 그리고 기후변화에 따른 국제 환경규제로 인해 친환경 대체연료 사용을 확대하고자 이러한 에너지를 생산하는 합성미생물을 개발하는 연구가 주목을 받고 있음

- 합성백신

백신에는 생백신(약독백신), 항원만을 분리 정제하여 만든 재조합 서브유닛 백신, 바이러스나 바이러스와 유사한 물질을 사용하는 바이러스 운반체를 사용 하는 바이러스 백신, DNA 백신이 있다. 이 중 합성생물학의 기술을 사용 하여 생산이 가능한 DNA백신이 주목받고 있다. DNA백신은 쉽게 설계하고 품질이 우수하며 보존성 안전성이 우수하여 비용이 낮아 다양하게 활용

- 생물치료제

생물치료약물(live therapeutic agent)은 살아있는 치료제를 말하며 바이러스와 세균으로 나뉜다. 캘리포니아 대학 Jay Keasling 연구팀은 초기 합성생물학 기술을 이용하여 대장균, 쓴쑥, 효모 등 서로 다른 유기체의 10개 유전자의 조합 을 통하여 말라리아 치료제인 아테미시닌(Artemisinin) 전구체의 대량생산 실현

- 바이오센서

생물 방어와 관련된 바이오센서들이 관심을 받고 있고, 이는 여러 방면으로 활용이 가능하다. 예) TNT 지 바이오센서

• CPS(Cyber-Physical System)
  - 로봇, 의료기기 등 물리적인 실제의 시스템과 사이버 공간의 소프트웨어 및 주변 환경을 실시간으로 통합하는 시스템
  - 기존 임베디드시스템의 미래지향적이고 발전적인 형태로서 제조시스템, 관리시스템, 운송시스템 등의 복잡한 인프라 등에 널리 적용이 가능
• MES(생산관리시스템, Manufacturing Execution System)
  - 제품주문에 의한 착수에서 완성품의 품질검사까지 전 생산활동을 관리하는 시스템
  - 생산 환경의 실시간 Monitoring, 제어, 물류 및 작업내역 추적관리, 상태 파악, 불량관리 등에 초점을 맞춘 통합 생산관리
• 미래 분석
• 클라우드 서비스
• 클라우드 컴퓨팅

- 인터넷 기반 컴퓨팅의 일종으로, 공유 컴퓨터 처리 자원과 데이터를 컴퓨터와 다른 장치들에 요청 시 제공
- 인터넷상의 서버를 통하여 데이터 저장, 네트워크, 콘텐츠 사용 등 IT 관련 서비스를 한번에 사용할 수 있는 컴퓨팅 환경

제2장 전략 수립 분야

제 1 절 산업수학센터 (Industrial Mathematics Center, IMC)

1) 기능 및 역할

산업수학은 수학적 이론과 분석방법을 활용하여 세상의 문제를 해결하고 부가가치를 창출하는 활동으로 다가올 4차 산업의 선제적 대비를 위한 고부가가치 산업현장 문제 발굴과 해결, 그리고 체계적이고 지속적인 산업수학 인재 양성을 선도적으로 수행할 거점 기능을 해야 함.

○ 산업수학센터(IMC)의 기능 및 역할

- 지역 주요 산업체 산업수학 현장 문제 발굴 및 해결
- 산업체, 학계, 연구소, 사회 구성원에 대한 산업수학 상담 창고 (방문상담/전화상담/온라인상담)
- 산업수학 전반에 대한 설계 및 컨설팅
- 지속적인 산업수학 인력 양성시스템 개발
- 산업수학 코디를 통한 1:1 맞춤형 현장전문가 상담 연계 지원
- 산업수학 지역사회 홍보
- 산업체와 산업수학자와의 소통 지원
- 수학단체(대한수학회 등), 국책수학연구소(NIMS, KIAS)와의 지원업무
- 국제적인 산업수학 단체와의 지원업무 공조
- 온라인을 통한 산업수학 최신정보 제공(유용한 홈페이지 개설)

산업현장문제 해결	· 산업현장의 문제를 발굴하여 수학적 방법으로 솔루션 도출 · 수학기반 창업 등으로 연계되는 기반 제공
산업수학 전문인력 양성	· 지속가능한 특화 교육시스템 구축 · 문제 해결 과정에서 산업수학 인력 역량 배양 · 특화 커리큘럼 신설 및 실무 체험 기회 제공
특화 분야 거점	· 지능정보사회 대비 핵심 기술 분야에 특화하여 전문 역량 축적 · 관련 전문가, 산업계 등이 모여 문제를 해결하는 개방형 거점 형성

	· 지역 거점 고부가가치 산업체 공조
시너지 창출	· 여러 경로로 발굴된 산업수학 문제와 연계, 최종 해결 역할 · 센터간정기교류를통한방법론·성과공유 · 지역 거점 고부가가치 산업체 공조

〈표 2.2〉 주요 기능 및 역할

제 2 절 IMC 기획(안)

1) 사업 개요

가. 사업 취지

○ 국내 대학의 산업수학 연구역량 강화 및 기업 등과의 직접 협력을 통한 인재 양성을 위해 대학에 지원

○ 산업수학의 자생적인 생태계 조성을 위한 마중물로서 산업수학센터(IMC) 지원 사업을 통하여 산업문제의 발굴, 해결, 인력양성의 플랫폼으로의 역할을 담당

○ 대학별 특화된 분야를 중심으로 대학-기업, 대학-공공기관 간의 파트너십을 통하여 산업문제를 발굴하고 산업문제해결 프로젝트를 수행하기 위한 플랫폼의 역할 수행

○ 집단연구의 수행을 통하여 다양한 산업문제의 해결을 위하여 시너지를 극대화하고 개방형 협력 생태계 조성의 토대로서 산업수학센터 지원 및 육성

나. 사업 목표

○ 대학의 산업수학의 전문성을 확보하고 산업수학 전문가들의 RESERVOIR 역할을 제공하고 지속적인 기업 및 공공기관 등과의 교류를 통하여 산업계와의 접촉면 확장

○ 지역에 기반을 둔 기업체 등과의 협력을 위하여 지역의 산업수학 전문가를 활용, 양성하여 문제를 해결함으로서 지역경제 활성화의 선순환 구조 구축

○ 산업수학을 지속적으로 이끌어 나갈 후속세대의 양성을 위하여 대학의 커리큘럼 개발 및 교육과정 신설 등의 역할을 산업수학 센터가 적극적으로 지원

다. 산업수학센터 운영 방향

○ 국내 대학의 산업수학 분야 연구역량 강화 및 기업과의 직접협력을 통한 문제해결과 전문 인재 양성을 위해 대학별 특화된 산업수학센터를 지정하여 육성

(대상) ‘산업수학점화프로그램’의 수행실적이 우수하거나 산업계와의 협력 경험이 풍부한 대학 등을 대상으로 공모를 통해 지정

(기능) 대학별 특화분야 자체 R&D 수행, 기업 문제해결 프로젝트 수행, 전문 인력 양성, 기업지원을 통한 창업 및 신산업 창출 등

(구성) 수학교수, 공학교수, 석 박사 학생과 박사후연구원 등이 참여

○ 캐나다 Mitacs(대학원생 기업인턴십), EU ECMI(대학원 산업수학교육), 독일 마테온(산업수학 융합 프로젝트 및 기술이전)의 장점을 조합하여 도입

○ 인공지능, 빅데이터, 금융, 바이오, 보안 등 대표적인 수학응용 분야를 중심으로 참여연구원을 구성하거나 지역별 거점대학을 중심으로 여러 대학이 참여하는 컨소시엄 형태도 가능

○ IMC 지정 대학 외에 타 대학 및 산업계 전문가 등 참여 가능

라. 지원 내용

○ 연구진 구성: 산업수학 활성화를 위한 교육·연구 프로그램의 목표를 달성하기에 적합하도록 창의적으로 구성 가능

○ 지원 규모: 사업단별 연간 000백만원(간접비 포함) 이내

○ 지원 기간: 최장 5년(2+3)

- 1차년도 연구기간 : 2017. 5. 1 - 2017. 12. 31
- 계속과제 연구기간: 2017. 5. 1 - 2022. 12. 31
- 지원기간은 평가를 통해 결정

○ 외부 인력 지원 범위: 대학원생, 박사연구원, 산업연계 전담 연구원, 산업수학 전담 교수

마. 추진 일정

일정	추진내용
	· 연구과제 공고
	· 신청서 접수
	· 서류평가, 후보 과제 발표 평가, 과제 선정
	· 연구 개시
	· 중간 결과 발표회 및 계속과제 선정
	· 연구진행 점검 학회
	· 최종 보고서 제출

〈표 2.3〉 추진 일정 : ※ 상기 일정은 변경 가능

2) 공모 신청

가. 신청 자격

○ 주관연구기관 : 수리과학 분야 연구자의 소속 대학

○ 주관연구책임자: 연구계획서 접수마 일 현재 주관연구기관에 재직 중인 연구자로서 아래 요건을 충족해야 함

- 과제 책임자로 참여
- 과제 연구기간(5년) 동안 재직 보장

⋆ 기타 주의사항

연구 신청 시 신중하게 하여야 하며 선정되어 연구 수행 중 중단할 경우에는 아래와 같이 엄중 하게 조치할 수 있음.

① 정당한 사유 없이 연구수행을 포기한 경우 : 3년 참여 제한

※ 국가연구개발사업 관리규정 제27조(참여제한 기간 및 사업비 환수 기준)

① 연구중단까지의 연구실적을 평가하여 “부적합(불량)” 시, 연구조원 인건비 등을 제외한 연구비는 전액 환수

① 모든 중단과제는 연구비 정밀정산을 실시하여, 부적정 집행액은 전액 환수

① 연구중단 연구책임자는 신규과제 신청 시, 감점(패널티) 등 행정적 불이익 조치

3) 평가 절차 및 기준

가. 평가 절차

나. 평가 기본 방향

○ 산업수학 활성화를 위한 구체적인 방법을 제시하고 있는가?

○ 학생들이 산업체를 경험하고 수학의 응용성을 체득할 수 있는 프로그램을 갖추었는가?

○ 수학이 생산성 향상에 직접 기여하는 사례를 만들기 위한 구체적 계획이 있는가?

○ 산업수학 진흥을 위한 참여 연구원들의 활동 계획이 효율적인가?

○ 제시한 방안이 장기적인 정부의 산업수학 육성방안으로 발전되기 위한 확장성이 있는가?

○ 수준 높은 지적 문화로서의 ‘수학 본연의 역할’과 산업수학을 통해서 드러나게 하려는 ‘수학의 실용성’을 조화시키기 위한 방안이 있는가?

○ 과제 수행 과정과 성과를 기록해서 미래에 사용할 수 있게 하는 효율적인 체계를 갖추었는가?
○ 계획은 현실성이 있고 예산은 합리적으로 편성되었는가?

다. 평가 항목

○ 사업 취지·목표와의 부합도, 내용의 창의성·도전성, 목표의 우수성, 기대성과의 파급성, 참여 인력의 능력, 산업수학 인력 양성 잠재력및 실적 등
○ 산업수학 문제발굴
 - 산학 협력 네트워크를 통한 문제 발굴
 - 공공프로젝트 위원회와의 협력을 통하여 수학적 문제해결 과제 발굴
 - 전략기술 분야의 기술 확보가 시급한 분야에서 수학이 핵심이 되는 문제 발굴
○ 산업수학 문제해결
 - 산업문제 해결워크숍 등의 개방형 플랫폼을 구축
 - 전문 코디네이터를 양성
 - 공공분야, 전략분야의 과제해결을 위하여 연구개발 사업을 진행
○ 산업수학 인재양성 및 산업화
 - 융합형 산업수학 인재양성 계획
 - 산업수학 기반 서비스 기업 육성 계획
 - 산업수학의 중요성에 대한 인식제고를 위한 노력

4) 연구 관리

가. 사후 관리

○ 성과 목표 관리제 도입
 - 선정평가 시, 계획과 함께 제시한 성과 목표의 질적 수준에 대한 평가 강화
 - 중간 평가 시, 성과 목표에 대한 달성도 평가를 강화하여 미비할 경우에는 연구비 조정
○ 연구계획서 주요사항 변경 시 연구비 조정

나. 평가

○ 중간 평가
 - 1단계(3년) 목표 달성여부와 2단계 연구계획을 평가
 - 1단계 평가 결과에 따라 2단계 계속지원 여부와 연구비 지원액 결정
○ 최종 평가
 - 최종 목표 달성 여부 등을 평가

다. 보고서 제출

○ 중간보고서: 최초 지원기간 종료 1개월 이전까지 제출해야 함 (별도 공지)

○ 최종보고서: 연구종료일 이전까지 결과보고서를 제출하고 평가결과를 반영한 최종보고서는 협약 종료 후 3개월 이내에 제출해야 함(별도 공지)

○ 연구비 사용 실적보고서 : 매년 당해연도 연구기간 종료일로부터 3개월 이내에 연구비 사용실적 보고서 제출

○ 연구과제 신청서는 다음의 내용을 포함하여 자유 형식으로 작성하고 PDF 파일로 e-mail로 송부

1) 사업계획 요약: 목표, 내용, 방법, 기대효과, 예산규모 등을 10쪽 이내로 작성

1) 연구자 정보 (연구책임자, 공동연구자, 참여연구원)

1) 연구사업비 소요명세서 (비목별 상세 내역 포함)

제 3 절 산업수학센터 운영방안 토론회 (2016.09.23)

1) 토론회 개요

일시: 2016년 9월 23일(금), 오후 3시 30분 - 5시 30분

장소: 한국과학기술회관 소회의실 4

참석대상: 산업수학 점화프로그램 참여 연구자,

수학계 산업수학 센터 참여 관심 연구자

2) 토론회 취지 및 기대효과

□ 취지

■ 산업수학 활성화 정책을 통해 수학의 사회적 책무를 강화함으로써 21세기 창조적 경제발전에 기여

■ 공공문제 산업문제 해결을 위한 플랫폼 구축을 통하여 정책 실현 구체화

■ 전문가 토론을 통한 산업수학센터 구축 및 운영 방안의 효율화 제고

□ 기대효과

■ 기업 당면난제 해결 및 국가 산업경쟁력 강화

■ 공공문제, 사회적 현안, 국가 주요 의제의 수학적 해결책 모색

■ 대학에서 수학, 공학 및 기업현장 경험을 갖춘 실리콘벨리형 고급 인력 양성을 통한 인재 배출

■ 수학기반 서비스 산업 개척 및 창출

□ 토론회 주관 및 참석

■ 토론회 준비위원회

- 기초원천연구기획과제 참여 연구원(***, ***, ***, ***, ***, ***)

■ 토론회 참석대상

- 산업수학 점화프로그램 참여 연구자
- 산업수학 센터 참여 관심 연구자

3) 프로그램

<table>
<tr><th>구 분</th><th>시 간</th><th colspan="2">내 용</th></tr>
<tr><td colspan="4" align="right">사회: *** 교수(***)</td></tr>
<tr><td>등 록</td><td>15:00 - 15:30</td><td colspan="2">등 록</td></tr>
<tr><td>환 영 사</td><td>15:30 - 15:40</td><td colspan="2">*** 교수(***** 회장, *****)</td></tr>
<tr><td>주제 발표</td><td>15:40 - 16:00</td><td colspan="2">*** 센터장(*********)
- 산업수학센터(IMC) 운영방안 -</td></tr>
<tr><td rowspan="2">패널 토론</td><td>16:00 - 17:00</td><td>토 론</td><td>좌장: *** 교수(*******)
*** 교수(****)
*** 교수(*****)
*** 수석(*****, **** 센터장)
*** 교수(*****, ***** 학장)
*** 교수(****)
*** 소장(*********)
*** 교수(*****)
(가나다 순)</td></tr>
<tr><td>17:00 - 17:30</td><td>질의응답</td><td></td></tr>
</table>

〈표 2.4〉 산업수학센터 운영방안 토론회 프로그램

4) 발제 주제 및 순서

Part I. IMC 위상 지향점 및 산업수학 활성화 방안 (10-12분 내외)

1. *** 교수(*****, ****** 학장)
   * 산업수학 위상 및 지향점 및 공학/응용분야와의 협력 방안 - 한국 내 수학 위상 및 산업 지향점
2. *** 교수(****)
   * 기업/공공기관/지역 등 기관과의 협업 방안

Part II. 센터 운영 및 연구/협력 네트워크 구축방안 (10-12분 내외)

3. *** 교수(*****)
   * 센터운영 구성 및 운영방안/타 연구사업과의 차별성
4. *** 교수(****)
   * 센터/NIMS와의 네트워크 구성방안 + 산업/수학의 조화를 위한 산업수학

Part III. 산학협력을 위한 교육 및 인재양성 방안 (15-16분 내외)

5. *** 수석(*****, **** 센터장)
   * 현장 필요에 부합하는 IMC의 모습과 요구사항 - 점화수학 인력과 함께 준비, 그리고 앞으로 할 프로젝트 현황을 논의하고, (국내 보험사, 삼성전자, 유통, 교육) 향후 협력 방안을 논의하는 시간
6. *** 소장(*********, CTO)
   * 현장 필요에 부합하는 IMC의 모습과 요구사항 인턴십 제도를 통한 인재양성
7. *** 교수(*****)
   * 교육 및 차세대 인적자원 육성방안 (+ 기업/공공기관/지역 등 기관과의 협업 방안)

Part IV. 토론자 자유 발언 주제 (20분 내외, 주제별 2~3명*1~2분씩 발언)

1. 산업수학센터의 핵심(필수) 기능(역할)
2. 산업수학 문제 발굴 방안 및 실효성 있는 산학 협력 방안
3. 산업수학과 수학 상생 발전 방안
4. 센터와 산업수학을 통한 미래 발전 비전

제 4 절 산업수학 공모과제

○ 회의 진행 사항

v3 (2016-09-12)

· 공공서비스 및 전략기술확보 분야만 한정하도록 변경

· Top-down 방식의 경우 기간과 연구비는 공공프로젝트위원회에서 결정

v2 (2016-08-30)

· 공공서비스 및 전략기술확보 분야를 중심으로 사업 내용 변경

· Bottom-up 방식에 Top-down 방식도 추가하도록 변경

v1 (2016-08-29)

· 산업수학 공모과제 기획(안) 초안

□ 사업 개요

○ 사업명: 산업수학 육성방안 개별 연구과제

○ 사업 목적

- 국가적 문제 솔루션 프로젝트 제공을 위한 공공서비스 및 전략기술확보 분야 연구과제 추진
- 수학계와 산업계 협력 생태계 조성을 위해 기존 R&D와 차별되는 개별 연구과제 필요
- 사업을 통해 국내 수학계의 산업수학 역량 강화 및 국내 산업계의 산업수학 인식 제고(提高)
- (2016년 4월 27일 발표) 미래창조과학부 산업수학 육성방안 2-2 ‘산업 수학 개별 연구과제 추진’

○ 사업 내용

- 공공서비스 및 전략기술확보 분야에서 발생하는 애로점을 단기간(6개월 이내)에 분석해 산업수학 문제로 발굴하고 문제 해결 기반을 마련하기 위해 단위 연구과제를 선정
- 연구과제 종료 후 파트너 (공공)기관 또는 기업과 폭넓은 문제 해결을 위해 MOU 또는 연구 프로젝트 체결 기대
- 연구과제 종료 직전 또는 종료 후 산업수학 ‘문제해결 워크숍(스터디그룹)’을 통해 발굴된 문제를 소개
- 주제 선정 및 사업 선정은 대한수학회가 위촉한 산업수학 관련 산학연 전문가로 구성된 ‘산업수학 공공프로젝트 위원회’ (이하 공공프로젝트위원회)에서 말음

○ 사업 기간: 2017 - 2021년 (5년)

□ 공모 계획

○ 과제 규모: 산업수학 공모과제 12억

○ 과제 종류: 단위과제

- (Top-down) 공공프로젝트위원회에서 사업 주제와 기간 및 연구비를 정해 제안하는 방식 (과제 기간은 24개월 이내)
- (Bottom-up) 개별 연구자가 파트너를 정해 사업 주제를 제안하는 방식. 기간 및 연구비는 3~6개월(30,000천원 한도), 6~9개월(60,000천원 한도)로 정함

○ 공모 횟수: 연 4회

- 3월, 6월, 9월, 12월에 선정 절차 완료 후 익월 1일 실시

□ 신청 자격

○ 신청 대상

- 기초연구진흥 및 기술개발지원에 관한 법률 제14조(특정연구개발사업의 추진)에 해당하는 기관 및 해당기관 소속 연구자

○ 신청 제한 (신청 마감일 기준)

- 수행 중인 국가연구개발사업 연구개발과제(단위 또는 세부과제 기준)가 5개이거나 연구책임자로서 수행하고 있는 과제가 3개인 연구자
- 국가연구개발사업 참여제한 기간이 종료되지 않은 기관 또는 연구자 등

○ 신청 요건

- 연구책임자는 반드시 수학 관련 대학 또는 연구소에 재직
- 모든 과제는 반드시 파트너 (공공)기관 또는 기업이 참여
- 모든 과제는 발굴한 문제를 종료 직전 또는 종료 후 '문제해결 워크숍 (스터디그룹)'에서 소개

□ 선정 절차

○ 공모 절차

① 주제 선정 및 사업 공모

- (Top-down) 공공서비스 및 전략기술확보 분야를 대상으로 공공프로젝트 위원회에서 사업 주제를 정해 제안
- (Bottom-up) 공공서비스 및 전략기술확보 분야에서 발생하는 문제를 대상으로 신청자가 파트너를 정해 제안

② 전문기관에서 접수 및 사전 검토

- 신청자의 자격, 신청서식, 파트너 기관 또는 기업의 적합성 등을 검토
- 전문기관은 국가수리과학연구소 또는 한국연구재단

③ 위원회 평가

- 서면평가 (필요시 연구책임자의 면접을 요구할 수 있음)

④ 전문기관에서 평가 결과 종합

- 전문가 평가 점수가 70점 미만인 경우 탈락
- 전문가 평가 점수가 70점 이상인 과제를 대상으로 평가 결과를 준용해 과제별 연구비 조정
- 평가 결과를 종합하여 종합평가서 작성

⑤ 사업추진위(미래창조과학부) 심의

- 전문기관이 제출한 종합평가서 등을 검토, 평가 결과의 타당성 등을 심의하여 지원예산 규모 내에서 최종 확정

제 5 절 산업수학 전문가 Pool

1) 산업기술 특성을 반영한 산업수학 17개 분류(2015.5)별 전문가 집단

연번	산업수학 분류	활용 지수	연구재단 분야코드		MSC 연구분야 코드 (대분류 00-99)
			연구분야	평가분야	
1	이산수학, 알고리즘	108	이산/정보	대수학/ 이산수학/ 정보수학	68 (Computer science) 91 (Game theory, economics, social and behavioral sciences)
2	조합론	123			05 (Combinatorics)
3	수론, 대수기하, 암호론	104	대수학, 이산/정보		10 (Number Theory (1940-1984) 11 (Number Theory (1980-) 14 (Algebraic geometry) 94 (Information and communication, circuits)
4	선형대수	71	대수학		15 (Linear and multilinear algebra, matrix theory)
5	대수학-일반	31			06 (Order, lattices, ordered algebraic structures) ~22 (Topological groups, Lie groups)
6	위상 및 기하-일반	89	위상수학, 기하학	위상수학/ 기하학	48 (Geometry (1940-1958)) ~58 (Global analysis, analysis on manifolds (1973-))
7	동역학/ 상미분	93	해석학	해석학	34 (Ordinary differential equations) 37 (Dynamical systems and ergodic theory (2000-))
8	편미분/ 적분방정식	284			35 (Partial differential equations) 45 (Integral equations)
9	해석학-일반	36			26 (Real functionss) ~ 47 (Operator theory (1959-))
10	연속체역학	122	응용수학	응용수학	70 (Mechanics of particles and systems) ~ 76 (Fluid mechenics)
11	수치해석	279			39 (Finite differences and functional equations) 65 (Numerical analysis)
12	수리계획/ 최적화	219			90 (Operations research, mathematical programming) 93 (Systems theory, control)
13	확률과정/ 마코프/ 큐잉	174	확률, 확률과정	확률, 이론통계	60 (Probability theory and stochastic processes)
14	확률해석 미적분	70			
15	확률론-일반	80			
16	통계적 추론-일반	249	추론/계산	응용통계	62 (Statistics)
17	표본조사 분석	80	모형자료분석		

〈표 2.5〉 산업기술 특성을 반영한 산업수학 17개 분류(2015.5)별 전문가 집단: 참고1. 산업기술별-수학분야-분류방안 (2015.6.5.)

연번	산업수학 분류	분야별 상위 10인 전문가 명단 (논문 기여지수 합) 국내기관소속 연구자논문 31,184편 (평균저자: 2.31명, 평균코드 2.22개) 분석결과
1	이산수학/ 알고리즘	****, ******(19.33) ***, ****-***(15.74) ****, ********(14.85) ****, *****-****(14.78) ***, **-***(13.33) ***, *** ***(7.96) ***, **** ****(7.58) **, *****-***(7.33) ***, ** ****(6.67) ***, ***-***(6.41)

2	조합론	***, ****** **.(31.77) ****, *** **(30.49) ***, *****(20.92) ***, ***-*****(16.08) ***, *** ***(13.01) ***, *******(12.33) ****, *** *****(11.67) ****, ***** ***(11.33) *****, **-****(9.5) ****, *******(8.75)
3	수론/대수기하/ 암호론	**, *. *.(129.55) ***, *******(69.66) ***, *** ***(55.06) *****, *******(34.23) *****, ***-***(30.64) ***, ** *****(29.26) *****, ******(29) ***, ********(25.66) ***, *.(25.55) ***, *******(24.08)
4	선형대수	****, ****-***(46.61) *****, ***-****(17.46) ***, ******(16.81) *******, ***** *.(14.53) ****, *****-***(14.11) *****, *** ****(12.67) ***, **-**(10.08) ***, ****-**(9.63) *****, **-****(8.51) ***, *****-****(7.46)
5	대수학-일반	***, ***** ***(162.24) ***, *** ***(45.2) *****, *** ****(35.25) ***, ****(32.78) ****, ****-***(28.96) ***, *** ****(28.96) ****, *** ****(27.83) ***, ***** **(20.52) ***, *** ****(20.15) ***, *** ****(19.46)
6	위상 및 기하- 일반	***, ***** ***(98.88) ****, *****(75.54) ***, ***** **(54.42) ***, *** **(50.17) ***, **** ****(49.17) **, *-****(48.42) ***, *** ****(47.54) ***, *** ***(45.95) ****, *** ***(40.17) ***, **** *****(39.92)
7	동역학/상미분	***, *******(46.33) ****, ** *.(34.29) ***, ****-****(16.69) ***, ****-**(12.81) ***, *******(12.71) ****, *. *.(10.96) ***, ***** **(10.57) *****, **** ***(9.35) ****, **** *****(8.88) ****, **** ***(8.8)
8	편미분/ 적분방정식	****, *****(49.04) ****, **** *****(27.76) ****, *-*****(25.34) ****, ********(22.96) *****, ********(21.28) ****, *******(20.88) ****, ** ***(18.16) ***, *** **(17.92) *****, ****-*****(17.7) ***, ********(17.57)
9	해석학-일반	***, **** **(84.32) ****, **** ***(78.35) ***, *** ***(78.11) ****, *****(75.36) ****, **** ***(57.71) ****, ********(50.4) ****, *******(46.72) ***, *** *****(41.05) ***, ********(39.46) ***, **** ***(39.28))
10	연속체역학	****, ******(26.24) *****, *** *****(10.35) ***, ******-***(8.51) ****, ** ***(8.47) ***, *******(7.67) ***, ***-****(7.59) ***, *** ****(7.54) ***, ***-****(6.78) ***, **** ****(6.76) *****, ***-****(6)
11	수치해석	****, ********(70.58) ***, ****-****(31.65) ***, *** ****(28.64) ***, ***-*****(25.03) ***, ****-**(24.3) ****, ****-***(24.1) *****, ********(22.56) ***, ***-******(19.36) ****, ** *.(18.47) ****, ***-***(17.98)
12	수리계획/최적화	****, ** *.(54.53) ***, ** ****(24.82) ***, *** *****(22.81) ****, *** **(19.17) ***, ***** **(18.7) *****, ***** ***(18.64) ****, *. *.(16.63) ***, *. *.(15.75) ***, *. *.(15.68) ****, ********(14.48)
13	확률과정/ 마코프/큐잉	***, ***-****(34.37) **, **-***(31.56) ****, *** ***(31.5) ****, ****-***(19.32) ****, **** ***(18.21) ***, ******(16.33) ***, *****(15.36) ****, ****-**(15.33) ****, **** ***(14.81)
14	확률해석 미적분	***, **** ***(14.5) ****, *** ***(13.04) ***, ** ****(12.46) ***, ********(12.1) ***, ****(11.28) **, ** ***(10.94) ****, *******(9.74) ***, *** ****(8.64) *****, ***-****(8.27)
15	확률론-일반	****, ***** ****(8.07) ***, ******(7.92) ***, ******(7.92) ***, **-***(7.88) ***, ********(7.68) ***, ** ***(7.19) ***, *******(7.19) ****, **** ***(7.17) ***, ********(7.14) ***, *** ****(7.13) *****, ***** ***(6.76) ***, ****-*****(6.58)
16	통계적 추론-일반	***, ***-****(50.72) ***, ********(49.53) ****, **** ***(30.9) ****, ****** *.(27.64) ***, *** ****(17.29) ***, *******(16) ****, ******(14.93) ***, *******(14.83) ***, **-****(14.19)
17	표본조사 분석	***, *** **(12.67) *****, *. *.(12.5) *****, ********(12.5) ****, ***** ****(11.33) ***, ********(10.95) ****, **** *.(10.75) ***, *******(10.56) ***, **** ***(10.5) **, ***-***(9.72) ****, *********(9.58) ***, *****-***(9.25)

〈표 2.6〉 산업기술 특성을 반영한 산업수학 17개 분류(2015.5)별 전문가 집단

2) 미래부 10대 산업분야 (119개 국가전략기술 전문가 설문응답자(93명)

산업분야	DB 인원	응답 인원	산업 분야별 전문가 집단
1. 금융·경영	66	19	***(****) ***(******) ***(******) ***(****) ***(****) ***(****) ***(****) ***(****) ***(****) ***(****) ***(****) ***(****) ***(*******) ***(****) ***(*******) ***(******) ***(****) ***(****) ***(***** ***)
2. 보건·의료	36	10	***(******) ***(******) ***(****) ***(*****) ***(******) ***(*******) ***(*****) ***(***) ***(**) ***(******)
3. 국토·건설· 교통·물류	25	8	***(*********) ***(****) ***(*********) ***(*******) ***(********) ***(*******) ***(*****) ***(********)
4. 선도산업	30	5	***(*******) ***(*******) ***(*******) ***(*********) ***(*****)
5. 재난·안전	51	16	***(*********) ***(********) ***(******) ***(*********) **(********) ***(*******) ***(*******) ***(********) **(*******) ***(*********) ***(*******) ***(***********) ***(********) ***(*******) ***(*******) ***(****)
6. 정보·보안	33	7	***(******) ***(**) ***(****) ***(*****) ***(*******) ***(*****) ***(*****)
7. 에너지·환경	51	13	***(*********) ***(*********) ***((*)******) ***(*****) ***(****) ***(****) ***(*********) ***(*****) ***(*******) **(*********) ***(********) ***(**********) ***(*******)
8. 농림·수산	19	6	***(*****) ***(*****) ***(*********) ***(*****) ***(*******) ***(*******)
9. 문화·생활	18	3	***(*******) ***(****) ***(****)
10. 국방·우주	31	6	***(*******) ***(*********) ***(*****) ***(*********) ***(****) ***(*********)
합계	360	93	

〈표 2.7〉 미래부 10대 산업분야 (119개 국가전략기술 전문가 설문응답자(93명) : 참고2. 산업수학-10대산업전문가-델파이분석 (2015.6.)

연번	플랫폼 클러스터	코드	플랫폼명칭
1	가. 이산정보분석	2B 이산자료조합매칭	이산자료 조합 매칭
2		2D 데이터조합최적화	빅데이터 기반 공공의료 최적화기술
3		8B 이산자료저장분석	이산자료의 저장 및 분석
4	나. 암호및정보처리	3A 지리정보해석	교통물류 빅테이터 기반 지리정보 해석
5		3B 최적지식정보검색	최적 지식정보 검색시스템
6		6A 암호기술	이산수학/수론 기반 암호기술
7	다. 이산복잡계	6C 복잡계알고리즘	수론/이산수학/동력학 기반 복잡계 알고리즘
8		7D 데이터기반UQ	데이터기반 불확실성 정량화
9		10B 거대복잡계모형	동역학계/통계/위상수학 기반 거대복잡계 모형
10	라. 금융수학	1A 파생상품계산	고차원 파생상품의 금융계산
11		1B 보험모수추정	보험산업 핵심모수 추정모델
12		1C 금융데이터분석	금융 빅테이터 분석기법
13		1D 핀테크금융모델	FinTech-ICT기반 금융모델
14	마. 수치최적화	3C 수치기반최적설계	수치계산 기반 최적설계
15		4C 비선형조합최적화	비선형 모델의 조합적 최적화
16		4D 멀티스케일모델	멀티스케일 기반 비선형 모델
17		5C 수리모델최적제어	수리 모델링 기반 최적 제어
18		7A 비선형계최적화	비선형계 최적화 및 제어
19	바. 계산유체역학	4E 수리유체역학	조선해양 분야 수리유체역학 모델
20		7B 계산유체해석	계산유체해석 기반의 해법
21		7C 유체구조체모델	유체/구조체 상호작용 모델링
22	사. 수치전산모사	4B 수치기반모의실험	수치기반 안정성평가 모의실험
23	사. 수치전산모사	5A 미방기반사건예측	미분방정식 모델기반 사건예측
24		8A 모델링기반방제	수리모델링 기반 방제시스템
25		2A 모델기반신호처리	수리모델링 기반 신호처리

아. 신호처리및역문제

26		2C 역문제해법	동역학/PDE 기반 역문제 해법
27		9C 영상처리기술	콘텐츠 제작용 영상처리기술
28		10C 산란역문제기법	산란방정식 기반 역문제 기법
29	자. 복합정보처리	4A 데이터기반자동화	데이터기반 자동화 기법
30		5B 복합모델기반탐지	복합 수리모델 기반 사건탐지
31		6B 정보기술분석모사	정보기술의 이산/기하/위상적 분석 및 시뮬레이션
32		9A 스마트러닝	빅데이터 기반 스마트러닝 시스템
33		9B 연속신호인지처리	연속신호의 인지 및 처리
34		10A 무인체계모델	미분방정식 기반 무인체계 모델

〈표 2.8〉 참고3. 산업수학 기술플랫폼 : 클러스터9-플랫폼34-상품123.pptx (2015.7.)

3) 산업기술 플랫폼(9/34)별 델파이분석 응답자(93명) 명단

연번	응답자	소속기관	관련 전문기술	클러스터	플랫폼
1	***	****	2. 보건·의료	가. 이산정보	2B 이산자료조합매칭
2	***	*****	2. 보건·의료	가. 이산정보	2B 이산자료조합매칭
3	***	*******	2. 보건·의료	가. 이산정보	2B 이산자료조합매칭
4	***	*****	2. 보건·의료	가. 이산정보	2B 이산자료조합매칭
5	***	******	2. 보건·의료	가. 이산정보	2D 데이터조합최적화
6	***	***	2. 보건·의료	가. 이산정보	2D 데이터조합최적화
7	***	**	2. 보건·의료	가. 이산정보	2D 데이터조합최적화
8	***	*****	8. 농림·수산	가. 이산정보	8B 이산자료저장분석
9	***	*****	8. 농림·수산	가. 이산정보	8B 이산자료저장분석
10	***	*****	8. 농림·수산	가. 이산정보	8B 이산자료저장분석
11	***	*******	8. 농림·수산	가. 이산정보	8B 이산자료저장분석
12	***	*******	3. 국토·건설·교통·물류	나. 암호정보	3A 지리정보해석
13	***	********	3. 국토·건설·교통·물류	나. 암호정보	3A 지리정보해석
14	***	*********	3. 국토·건설·교통·물류	나. 암호정보	3B 최적지식정보검색
15	***	*****	3. 국토·건설·교통·물류	나. 암호정보	3B 최적지식정보검색
16	***	***	6. 정보·보안	나. 암호정보	6A 암호기술
17	***	*******	6. 정보·보안	다. 이산복잡	6C 복잡계알고리즘
18	***	*****	6. 정보·보안	다. 이산복잡	6C 복잡계알고리즘
19	***	*******	6. 정보·보안	다. 이산복잡	6C 복잡계알고리즘
20	***	*****	7. 에너지·환경	다. 이산복잡	7D 데이터기반UQ
21	***	*********	7. 에너지·환경	다. 이산복잡	7D 데이터기반UQ
22	***	*******	10. 국방·우주	다. 이산복잡	10B 거대복잡계모형
23	***	****	10. 국방·우주	다. 이산복잡	10B 거대복잡계모형
24	***	******	1. 금융·경영	라. 금융수학	1A 파생상품계산
25	***	****	1. 금융·경영	라. 금융수학	1A 파생상품계산
26	***	****	1. 금융·경영	라. 금융수학	1A 파생상품계산
27	***	******	1. 금융·경영	라. 금융수학	1A 파생상품계산
28	***	****	1. 금융·경영	라. 금융수학	1A 파생상품계산
29	***	******	1. 금융·경영	라. 금융수학	1A 파생상품계산
30	***	****	1. 금융·경영	라. 금융수학	1B 보험모수추정
31	***	****	1. 금융·경영	라. 금융수학	1B 보험모수추정
32	***	****	1. 금융·경영	라. 금융수학	1B 보험모수추정

33	***	*******	1. 금융·경영	라. 금융수학	1B 보험모수추정
34	***	****	1. 금융·경영	라. 금융수학	1B 보험모수추정
35	***	****	1. 금융·경영	라. 금융수학	1B 보험모수추정
36	***	****	1. 금융·경영	라. 금융수학	1B 보험모수추정
37	***	****	1. 금융·경영	라. 금융수학	1C 금융데이터분석
38	***	****	1. 금융·경영	라. 금융수학	1C 금융데이터분석
39	***	****	1. 금융·경영	라. 금융수학	1C 금융데이터분석
40	***	*******	1. 금융·경영	라. 금융수학	1D 핀테크금융모델
41	***	***** ***	1. 금융·경영	라. 금융수학	1D 핀테크금융모델
42	***	****	1. 금융·경영	라. 금융수학	1D 핀테크금융모델
43	***	****	3. 국토·건설·교통·물류	마. 수치최적	3C 수치기반최적설계
44	***	**********	7. 에너지·환경	마. 수치최적	3C 수치기반최적설계
45	***	*********	3. 국토·건설·교통·물류	마. 수치최적	3C 수치기반최적설계
46	***	*******	4. 선도산업	마. 수치최적	4C 비선형조합최적화
47	***	*********	4. 선도산업	마. 수치최적	4D 멀티스케일모델
48	***	*******	5. 재난·안전	마. 수치최적	4D 멀티스케일모델
49	***	*******	5. 재난·안전	마. 수치최적	5C 수리모델최적제어
50	***	********	5. 재난·안전	마. 수치최적	5C 수리모델최적제어
51	***	*******	5. 재난·안전	마. 수치최적	5C 수리모델최적제어
52	***	***********	5. 재난·안전	마. 수치최적	5C 수리모델최적제어
53	***	*******	5. 재난·안전	마. 수치최적	5C 수리모델최적제어
54	* *	*******	5. 재난·안전	마. 수치최적	5C 수리모델최적제어
55	***	*********	7. 에너지·환경	마. 수치최적	7A 비선형계최적화
56	***	*******	7. 에너지·환경	마. 수치최적	7A 비선형계최적화
57	***	*****	7. 에너지·환경	마. 수치최적	7A 비선형계최적화
58	***	*******	7. 에너지·환경	마. 수치최적	7A 비선형계최적화
59	***	****	7. 에너지·환경	마. 수치최적	7A 비선형계최적화
60	***	*********	7. 에너지·환경	바. 계산유체	7B 계산유체해석
61	***	****	7. 에너지·환경	바. 계산유체	7B 계산유체해석
62	***	*********	7. 에너지·환경	바. 계산유체	7B 계산유체해석
63	***	**********	3. 국토·건설·교통·물류	바. 계산유체유체	7C 구조체모델
64	***	*********	7. 에너지·환경	바. 계산유체	7C 유체구조체모델
65	***	*******	7. 에너지·환경	바. 계산유체	7C 유체구조체모델
66	***	*******	4. 선도산업	사. 수치전산	4B 수치기반모의실험
67	***	*********	4. 선도산업	사. 수치전산	4B 수치기반모의실험
68	***	*****	4. 선도산업	사. 수치전산	4B 수치기반모의실험
69	* *	********	5. 재난·안전	사. 수치전산	5A 미방기반사건예측
70	***	*******	5. 재난·안전	사. 수치전산	5A 미방기반사건예측
71	***	*********	5. 재난·안전	사. 수치전산	5A 미방기반사건예측
72	***	********	5. 재난·안전	사. 수치전산	5A 미방기반사건예측
73	***	*********	8. 농림·수산	사. 수치전산	8A 모델링기반방제
74	***	*******	8. 농림·수산	사. 수치전산	8A 모델링기반방제
75	***	******	2. 보건·의료	아. 신호처리	2A 모델기반신호처리
76	***	******	2. 보건·의료	아. 신호처리	2C 역문제해법
77	***	******	2. 보건·의료	아. 신호처리	2C 역문제해법
78	***	****	9. 문화·생활	아. 신호처리	9C 영상처리기술
79	***	*********	10. 국방·우주	아. 신호처리	10C 산란역문제기법

80	***	*********	3. 국토·건설·교통·물류	자. 복합정보	4A 데이터기반자동화
81	***	*********	5. 재난·안전	자. 복합정보	5B 복합모델기반탐지
82	***	*********	5. 재난·안전	자. 복합정보	5B 복합모델기반탐지
83	***	******	5. 재난·안전	자. 복합정보	5B 복합모델기반탐지
84	***	*********	5. 재난·안전	자. 복합정보	5B 복합모델기반탐지
85	***	****	5. 재난·안전	자. 복합정보	5B 복합모델기반탐지
86	***	**	6. 정보·보안	자. 복합정보	6B 정보기술분석모사
87	***	****	6. 정보·보안	자. 복합정보	6B 정보기술분석모사
88	***	*****	6. 정보·보안	자. 복합정보	6B 정보기술분석모사
89	***	*******	9. 문화·생활	자. 복합정보	9A 스마트러닝
90	***	****	9. 문화·생활	자. 복합정보	9B 연속신호인지처리
91	***	*********	10. 국방·우주	자. 복합정보	10A 무인체계모델
92	***	*****	10. 국방·우주	자. 복합정보	10A 무인체계모델
93	***	*********	10. 국방·우주	자. 복합정보	10A 무인체계모델

〈표 2.9〉 산업기술 플랫폼(9/34)별 델파이분석 응답자(93명) 명단: 참고2. 산업수학-10대산업전문가-델파이분석 (2015.6.)

제3장 문제발굴 분야 (라운드 테이블)

제 1 절 라운드 테이블 I

일 시 : 2016년 8월 31일 (수) 16시

장 소 : 국가수리과학연구소 CAMP

참석 자

연 구 원 : ***(***), ***(***), ***(****), ***(*******), ***(****), ***(***), ***(*********)

자문위원 : ***(** ** ** **), ***(********), ***(***), ***(***), ***(***)

일반참가자 : ***(*********), ***(*****), ***(*********), ***(*********), ***(*****)

보 조 원 : ***(*****)

1) PSSE 프로그램

한전에서 사용하는 프로그램은 PSSE이다. 전력계통 계산하기 위해 기본적으로 두 가지가 필요하다. 방정식을 풀기 위해서 그전에 반드시 해결해야하는 문제인데 우리나라에 이 툴이 없다. 캐나다 등 외국에서 100 200억으로 수입해 사용하고 있는 Topology Processing과 State Estimation이다. Topology Processing은, 전력계통 방정식을 풀기 위해서는 송전 선로에서 어디에 어떤 선로가 서로 연결되어 있는지를 알아야 되는데, 여기서 이 연결 관계를 정의 하기 위한 토폴로지이다. 집합으로 생각하여 어느 집합이 있고, 그 집합들이 어떻게 연결되어 있는지를 연산을 통해 만들어 내는 것이다. 이것은 수많은 경우의 수들이 계속 바뀌어 해결을 하지 못하고 있다. 그 다음은 State Estimation 이다. 읽어들인 은 기계가 읽어드린 인데 에러가 발생한다. 키리호프의 법칙에 의해서 시그마 아이는 제로가 되어야 한다. 읽어 드리는 모든 들은 에러가 있다. 그래서 정확한 이 아니라 시그마 아이가 제로가 안 된다는 말이고 그러면 키리호프의 법칙을 전력계통 방정식에 적용할 수 없다는 말이다. 그것을 수렴화 시켜서 전체 합이 제로가 되도록 만들어 주어야 한다. 완벽하게 수렴되는 프로그램은 아직 없고, 우리나라에는 없어서 전량 수입에 의존하고

있다. State Estimation을 40년을 연구했는데도 몇 개 국가 외에는 솔루션이 없다. 그것이 그만큼 간단한 문제가 아니라는 것이다.

$S_s = S_d + S_{\text{loss}}$에서 먼저 loss를 정확히 알 수 없다. State Estimation에서 가장 어려운 문제가 발전량은 정확히 아는데, 물리 세계에서 일어나는 loss가 정확히 얼마나 일어날 수 있는지 모른다는 것이다. 또 정확하게 모선에 얼마만큼의 전류가 흐른다는 것을 알 수 있는 방법이 없다. 측정량으로 계산한 결과 값을 읽은 것이지 실제적인 물리을 정확히 알 수가 없다.

계통 손실에 대해서는 실시간으로 발생하는 수치이기 때문에 전 세계적으로 맞출 방법이 없는 실정이다. 역률 손실에 관해서는 완벽하게 100프로 맞추는 것은 불가능하기 때문에 전기 공학에서는 역률 손실에 대해서 크게 생각하지 않고 기계적 해법이 있기 때문에 문제가 되지 않는다. 그러나 불평형 문제에 관해서는 해결이 안 된 것이다. 이것을 해결책이 있다면 에너지 해결적인 측면에서 큰 의미가 있게 된다.

그러나 이런 공학 프로그램들을 바라보는 시각은 완벽한 솔루션을 준다는 것에 의미가 있는 것이 아닙니다. 기상청에서 영국모델을 사와서 사용한다. 그런데 그것이 working 하는 이유는 그 프로그램은 계산이 완벽해서가 아니라 그 계산이 어떤 결과를 주는지 계속해서 갈고 닦아온 것이라서 우리나라에서 만든다 해도 시간이 많이 걸릴 수밖에 없다.

2) 그리드 시스템

마이크로그리드는 개개인이 태양에너지 신재생 에너지 발전량을 주위에 팔겠다는 것이다. 그 법안이 올해 통과되었다. 앞으로 마이크로그리드 시대로 갈 것이다. 전력 계통 관련 일들이, 송전 배전 이런 것 들이 없어지고, 마이크로 그리드 시스템이 들어온다고 하면 지금 설치하여 통제하고 있는 시스템들이 모두 바뀌어야 한다. 한전이 존재하기 위해서는 로컬라이즈드된 그리드라는 것이 존재해야 하는 것으로 판단된다. 따라서 마이크로그리드 시스템으로 갈 때 어떻게 트렌지션이 일어날 것인가에 대하여 연구할 필요가 있다. 마이크로그리드 연구사가 있다. 여기는 개통 연계에 대해서 그림 전반을 그리는 식을 연구하고 있다. 각 빌딩이라든가 태양광 발전을 한다면 자체적으로 만들어 쓰고 남는 것은 그리드를 통해 다른 빌딩으로 가는 것이다. 이렇게 소규모 그리드가 만들어 진다. 이렇게 떼어서 쓰는 것은, 일정 그리드에서 일정 용량을 초과하게 되면 고장이 나게 되므로 분리를 시켜야 한다. 그래서 그리드와 그리드 사이에는 큰 규모의 차단기를 두고서 계통을 연결하게 된다.

사실은 이것이 배전 선로에

220이나 380 정도의 저압으로 만들어지기 때문에 우리의 개통망을 탈 필요가 없을 것이고, 한전망과 관계없이 이루어 질 것이라는 시나리오가 있다. 그러면 그리드 시장을 통제하는 시스템이 생겨야 한다. 우리는 그리드 통솔 시스템이라 해서 소규모 EMS, 그리드 EMS라 하는 것이 생겨가지고 그리드 간의 연결을 공적인 영역으로 남게 될 것이라 보고 있다. 앞으로 이런 식으로 갈 것이라 예측을 하는데, 공적인 망인 그리드나 이런 것들에 대한 것은 국가가 관여할 영역이지 않은가 하고, 전력 시장이 형성이 됐을 적에 개인 간의 트레이드가 규모가 커지면 국가가 관여하는 전력시장 자체가 오픈이 되어서 이런 시장 자체에서 입찰을 통해 수익을 보장하고 하는 것들이 시장이 열릴 것이라는 예측을 하고 있다.

한전은 공급자이다. 전력 계통이라는 것이 공급자 시각의 문제일 텐데, 마이크로 그리드로 가면 수요자를 봐야 하는 것으로 바뀌어야 하는 것이라 본다. 그래서 우리가 길게 보고 마이크로 그리드로 간다고 보면 오늘 포함되지 않은 수요자를 쪽의 인코드 측이 생각하는 비즈니스 모델도 우리가 생각해야하는 좋은 문제의 소스가 될 수 있다. 그러나 일단은 마이크로 그리드 쪽에는 수리 모델이 아직 없다. 기껏 있는 것이 전력개통방정식의 수리 모델은 발전기 모델과 변압기 모델 같은 것들이고, 나머지 부하 같은 것들은 부하로 한꺼번에 넣어서 보고 한다.

수요자 관점으로 보면 기본적으로 빅 데이터 관점에서 사용자들의 패턴이나 수요나 시간별 사용 같은 문화를 파악하고 그 사람에게 가치를 부여하는 식으로 해서 optimization 해서 보면 새로운 문제들이 등장하게 된다. 그래서 DVM이라 해서 전국에 다 하려고 시도했다. 실시간으로 전력 양을 읽어 들여서 과금을 메기는 시스템을 하려고 했다. 그러나 투자비가 5조 가량 들어가게 되어서 그 프로젝트를 못 했다. DVM이 제공이 되게 되면 시간당 전력 사용량 및 패턴 등을 분석할 수 있게 되고 여러 가지 문제가 해결 될 수 있지 않을까 예상을 했다.

3) 연구계획

PSSE 프로그램의 개발이나 마이크로그리드에 대한 연구는 고부가가치가 매우 높은 분야이지만 국내의 연구개발 수준이 매우 낮다. 국가적으로 필수불가결하게 수행되어야하고 장기적인 관점에서 논의가 되어야 한다. 향후 지속적인 한전과의 교류를 통하여 수학계가 갖고 있는 고급수학이론의 접목이 필요하다. 이 분야의 전문가를 수학분야 뿐만 아니라 전기공학, 컴퓨터공학, 물리학 등 다양한 분야의 전문가들과의

정기적인 장이 마련되어야 한다.

〈***(** ** ** **) 발표 자료 〉

제 2 절 라운드 테이블 II

일 시 : 2016년 9월 6일 (화) 16시

장 소 : 달개비(시청역)

참석자 : ***(***), ***(***), ***(***), ***(***), ***(****), ***(****), ***(****), ***(*********), ***(*********), ***(*****), ***(*********), ***(** ****)

발표자 : ***(** ****)

1) 의료 빅데이터의 판독 및 응용 사례 소개

- x-ray 사진 판독을 통한 횡경막 이상 징후 판독 - 뼈나이 측정을 통한 성조숙증 판단 방안
- 대장운동 검사에서 x-ray 판독방안
- 늑골골절 판독 방법

2) 의료 빅데이터의 활용에 관한 문제점

- 의료계 또는 병 진단에는 많은 검사를 통하여 병의 유무 및 이상 징후 등을 파악하여 환자를 진료한다. 현재, 검사 방법 중 한 가지는 영상을 통하여 환자의 몸의 내부를 촬영하여 파악하려 한다(예: X-ray, MRI, CT 등).
- 고가 및 저가의 영상장비에서부터 축적된 많은 영상자료의 판독에 있어서 많은환자및병의진행상황에따른 빠른시간내에판독의필요성이증가 하고 있다. 또한, 저가장비를 통한 정확한 판독은 경제학적인 측면에서 많은 수요가 증가하고 있다.
- 영상자료의 판독에는 사람(의사)의 시가적인 분석에 의존하여 판독하고 있는 실정이므로, 현실적으로 많은 시간과 힘든 노동력이 투입되고 있어 자동판독의 필요성이 대두되고 있다.

3) 의료계의 수요 전망

- 영상자료 판독에는 많은 의사가 투입되는 현실에 이것을 대치할 수 있는 기술적인 방법은 의료계가 절실히 필요로 하는 분야이고, 또한 현실적으로 판독 자체에는 많은 의료 지식이 필요로 하지 않다.

- 의료계에서는 환자의 수술 및 진료에 투입되는 의사가 많이 필요하고 모니터 앞에서는 판독하는 의사의 수를 줄이고 싶은 실정이다. 그러나 현재 모니터 앞에서 근무하는 의사의 수는 매년 증가하는 추세이다.
- 의료계는 영상판독이 자동화되고 이것을 바탕으로 의사가 재검토하는 시스템이 구축되기를 기대하는 현실이다. 앞으로 영상자료를 자동으로 판독하는 수요는 기하급수적으로 증가할 것으로 사료된다.

4) 산업수학 측면에서 역할

- 영상자료/빅데이터의 판독을 자동으로 구현하기 위해서는 다양한 수학적인 아이디어를 바탕으로 컴퓨터의 기술이 결합한 형태가 요구되고 있다.
- 의료계의 영상 판독을 위하여 수학의 미분 적분, Compressive sensing, dynamical theory 등이 사용되어 새로운 기술을 개발하면 산업수학의 파급 효과가 매우 크다고 기대한다.
- 영상판독분야는 현재 많은 나라에서 활발히 연구되고 있는 산업 수학의 분 야이다. 이것이 의미하는 것은 산업계의 수요가 매우 많다는 것이다.

5) 앞으로 추진 방향

- 영상의 판독에 관한 수학계의 연구 및 필요성이 대두되고 있는 현실에 많은 수학자들이 이분야에 연구할 필요성이 있고 또한 수학과를 졸업한 학생들의 취업에 많은 기여를 할 것으로 사료된다.
- 현재 수학계의 문제점은 영상자료 자동판독 분야의 인식이 저조하고 많은 사람들이 접근하기에 어려운 분야로 인식되고 있다.
- 학회의 차원에서 교육 및 사례를 발굴하여 이 분야의 중요성 및 파급효과를 전파시킬 필요성이 있다.

6) 결론

2차 라운드테이블 회의에서는 영상판독자동화기술을 개발하고 있는 ** 회사의 *** 대표이사의 개발현황(사용하는 수학의 방법론 및 컴퓨터기술 등)을 알게 되었고 참가한 많은 수학자들이 개발방향에 관한 수학적인 조언 등을 많이 제시하였다. 앞으로 소개된 몇 가지의 활용방안 뿐만 아니라 다양한 영상판 독에 관한 아이템개발에도 수학자들이 참가할 수 있다는 용기를 준 것으로 사료된다. 수학과 의학이 만나서

새로운 산업분야의 개척의 가능성을 제시하였다고 사료되며 산업수학의 중요성이 다시 한번 더 부각되었다.

〈***(**) 대표 발표 자료〉

제 3 절 라운드 테이블 III

주제 : 폐 형상에서 질서 찾기: 좋은 폐와 나쁜 폐, 무엇이 다른가? (폐기종 사전 진단)

일 시 : 2016년 10월 14일 (금) 16시

장 소 : 공간더하기(강남역)

참석자 : ***(***), ***(****), ***(*******), ***(****), ***(****), ***(*********), ***(****), ***(*****), ***(*****), ***(*****), ***(*******), ***(*****), ***(****)

발표자 : ***(****)

- 폐와 폐기종의 특징, 측정방법, 의료현장에서의 요구에 대한 개괄적인 설명이 있었음
- 여러 가지 가능성에 대한 탐색적 토론이 있었으며 한달 후에 보충 모임을 하기로 함

〈*** 박사 발표 자료〉

제 4 절 라운드 테이블 IV

1) 개요

일 시 : 2016년 11월 8일 (화) 18시

장 소 : 호암교수회관(서울대학교)

참석자 : ***(**), ***(******), ***(***), ***(****), ***(***), ***(***), ***(***), ***(***)외 12명

발표자 : ***(**, 상무)

발표 제목 : Emergent Fashion on a Complex Network

2) 프로그램

	18:00-18:30 저녁식사 및 네트워킹
18:30-20:30 *** 상무의 산업에서 발생하는 문제 · 1부 : 빅데이터로 어떻게 혁신이 가능한가 · 2부 : 유행은 어떻게 일어나는가	

3) 주요논의 사항

· 1부 : 빅데이터로 어떻게 혁신이 가능한가

공공혁신 사례를 중심으로 빅데이터 활용으로 인한 혁신을 소개함

- 전염성 가축 질병의 발생원인과 염경로, 병역대책 수립 (조류독 , 구제역)
- 메르스 확산방지, 지카바이러스 확산경로(로밍서비스 이용데이터 활용) 파악

• 2부 : 유행은 어떠한 구조로 일어나는가?

비즈니스 관점에서 경험적으로 어떤 특정집단이 유행을 격발시킨다고 추측함.

구나칼슨(Gunnar Carlsson, 미국 스탠퍼드대 명예교수)의 아야스디(AYASDI) 솔루션을 이용해서 유행에 대한 빅데이터를 분석 시도

- 복합한 데이터에 대하여 아야스디 솔루션으로 얻어진 모양을 통해 데이터 특성 파악
- 그래프, 클러스터링, 트리로는 얻을 수 없는 정보를 데이터의 모양(shape)을 통해서, 데이터에 대하여 이전에 알려져 있지 않은 특성 파악
- 예상하지 못했던 데이터의 모양으로, 특이점을 알 수 있고, 데이터 해석의 또 다른 방법론으로 검증
- 지나치게 방대한 데이터를 어떤 선입견도 없이 데이터의 구조만 가지고 우리가 이해 및 해석이 가능한 데이터의 모양을 제공

예: 허니버터칩의 경우

데이터 분석 결과 : 허니버터칩이 초기에 유입 이후 44주 이후에 유행이 격발하기 시작했으며, 유명 연예인들은 유행을 격발시킬 것이라 고 예상했으나, 유명스타들의 경우는 초기 유입 42-43주인 후기에 유행을 따라가고 있는 양상임을 알 수 있다. 즉 유명연예인들이 유행을 선도하는 것은 아님을 알 수 있다.

- 유행은 제품에 의존하는 것이 아니라 네트워크 구조에 의존한다고 파악
- 허니버터 칩 vs. 화장품
- 허니버터 칩은 음식이라는 카테고리의 유행, 화장품 및 의류는 허니버터 칩과는 다른 카테고리에 속함
- 네트워크 카테고리별로 유행의 구조가 달라짐

(논점) 유행이 일어나는 구조를 밝혀, 그 구조를 따르는 새로운 유행을 만들어 낼 수도 있지 않을까?

(비즈니스 관점)

1. 신제품의 서로다른 성격 :

   신제품(extension, new (category) product)이 유행을 할 때 나타나는 현상 분석

   - Extension product은 기존 제품을 업그레이드하여 생산되는 제품군
   - new category product은 기존의 없던 새로운 제품군 (예 : BB 크림 등) 이때, new category product의 유행의 구조 해석 필요

2. 네트워크의 구조

   유행의 네트워크 구조의 특성에 따라서 유행의 패턴이 같다. 네트워크 구조가 같다면 유행하는 현상은 같은 구조를 가진다. 그렇다면, 앞으로의 유행은 과거의 유행을 관찰하면 알 수 있다. 이때, 수학의 언어로 이 네트워크 구조를 구체적으로 표현 필요하다. 마케팅(네트워크 구조)가 수학과 융합될 시기!

3. 사회적 의사결정

   새로운 기술의 시대가 오면 그 기술의 적응 곡선이 있다. (Duncan J. Watts)

   얼리 어답터 군 :

   - Technology Enthusiasts : 무조건 받아들임
   - Visionaries : 20%의 유익이 있다면, 80%의 불편을 감수하는 소비자 (좋은 것을 선도적으 로 사용하는 소비자)

   실용적 보수주의자

- Pramatists : 80%가 있어야 쓰기 시작함 (20% 의 불편 감수)

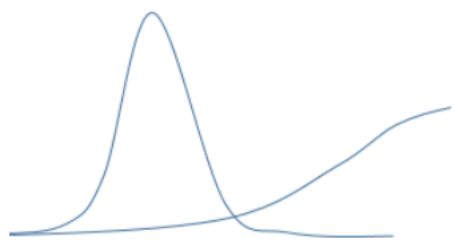
· 얼리 어답터군과 실용적 보수주의자 사이에는 틈(chasm)이 있는데, 이 틈은 기술 적인 상품의 경우 확연한 차이 가있다. 그리고 이 틈을 생태계가 형성되는 동안의 소요시간 또는 소비성향의 차이로 해석할 수 있다.

· Chasm 곡선의 한계 : 형태를 직관적으로 표현한 곡선 아직 수학적으로 명확하지 않다.

(Chasm에 따른 신제품의 해석과 마케팅에서의 문제점)

▶ 같은 제품의 다른 해석

목표 : 마케팅(불쏘시게)과 품질의 중요성(장작)의 균형을 수식으로 표현



〈그림 3.1〉 마케팅(불쏘시게)과 품질의 중요성(장작)의 균형을 수식으로 표현

· 불쏘시게 : 마케팅과, 특이한 기능 한 두 가 지에 열광해서 사용하는 사람들 (얼리 어답터 의 소비 성향)

· 장작불(은은한 성장) : 익숙해지는 단계에 이르러서 사용하기 시작하는 사람들 (실용적 보수주의자의 소비 성향)

▶ 마케팅 강도의 조정

· 불쏘시게는 언제까지 제공할 것인가?

· 은은한 성장기에 들어가는 시기를 알 수 있는가?

▶ 마케팅 효과의 지속 효과

▶ 두 가지 도구(불쏘시게와 장작불)의 균형

· 경험에 의한 각적인 판단에서 구체적으로 명확한 수식 표현

· 마케팅에 필요한 불쏘시게 역할을 하는 투자금을 적절한 임계

(Chasm에 따른 신제품의 해석과 마케팅에서의 문제점)

Duncan J. Watts & Steven H. Strogatz, Collective dynamics of ‘small-world’ networks, Nature 393-440-42, 1998.

- 격자 네트워크와 랜덤 네트워크의 중간네트워크를 통해 조정할 수 있는 단순한 모델을 탐구
- 이러한 시스템이 격자와 같이 고도로 집단화 될 수 있지만 무작위 그래프와 같이 특성 길이가 짧음
- 작은 세계 현상 (일반적으로 6번만 전파하면 모두에게 알려짐)과 유사하게 ’ 작은 세계’ 네트워크라고 부름 특히, 전염병은 정규 격자보다 소규모 네트워크에서 더 쉽게 퍼집니다. 즉, 6번만 퍼트리면(소개가 되면) 한국의 전국에 마케팅이 성공

격자 네트워크와 랜덤 네트워크의 중간 네트워크로서의 작은 세계 네트워크를 통해 마케팅 확산속도 분석과 그에 대한 구체적인 수식화가 필요하다.

(결론)

신제품의 사업의 경험을 바탕으로 마케팅의 구조를 파악하고 이를 기반으로 모델링한 수식을 얻어 내었으나, 이에 대한 보정과 좀 더 명확한 표현 방법과 이를 뒷받침할 증명의 요소가 필요하다. 이번 라운드테이블에서는 문제에 대하여 충분한 논의를 하였으며 추후 논의를 약속하고 마무리하였다.

〈***(** 상무) 발표 자료〉

제4장 문제해결 분야 (문제해결 워크숍)

제 1 절 들어가기

산업계로부터 제기된 산업문제는 모더레이터를 중심으로 문제해결을 모색한다. 기업들과 다양한 활동을 수행하는 공학자들과 달리 수학자들은 산업 현장에 익숙하지 않기 때문에 기업들과 수학자들을 이어주는 역할을 모더레이터가 담당한다. 기업들은 주로 프로젝트를 위탁하는 형식으로 대학 또는 연구소의 전문가들과 협력해 산업의 문제를 해결하려고 한다. 이와 달리 산업수학에서는 스터디그룹이라 부르는 문제해결 워크숍을 이용해 산업문제를 해결하곤 한다. 이는 유럽을 비롯한 선진국에서 수십년간 진행해 온 보편적인 방식이다.

모더레이터는 문제해결 워크숍이 열리기 전에 기업들과 산업문제에 대해 충분한 논의를 거침으로써 수학자들이 보다 빠르게 산업문제를 이해할 수 있도록 돕는다. 문제해결 워크숍은 주로 일주일 동안 열리는데 월요일에 기업에서 산업문제를 발표하고, 워크숍에 참석한 수학자들은 관심 있는 기업문제를 선택하고 해결방안을 집중적으로 찾는다. 이러한 결과물은 모더레이터가 수집하고 정리하여 금요일에 모든 참석자들에게 공개하고 서로의 의견을 교환하게 된다.

문제해결 워크숍에 소개되는 산업문제는 복잡하고 어렵기 때문에 워크숍 기간 안에 문제가 완전히 해결되는 경우는 많지 않다. 대신 문제해결 과정에서 새로운 아이디어를 도출하고, 기업에서 준비한 샘플 데이터에 적용했을 때 유의미한 결과를 얻을 수 있음을 확인하는 수준에서 끝나곤 한다. 워크숍이 끝난 후 기업 관계자들은 아이디어나 새로운 접근방법을 도출한 특정 수학자들과 논의하고, 이를 통해 산업문제 해결을 지속적으로 진행하기 위한 프로젝트를 수행하게 된다.

수학자들이 주로 다루는 산업문제는 문제해결에 시간과 자원이 많이 요구되기 때문에 공학자들이 엔지니어링 관점에서 접근하는 것과 차이가 있다. 대신 기업의 기술성장이 한계에 이르러 변곡점을 이루는 경우, 다시 한번 도약의 발판을 마련하는데 산업수학에서 추구하는 문제해결 방법은 나름의 가치가 있다.

제 2 절 제1차 문제해결 워크숍 (라운드 테이블 III의 문제해결)

1) 모더레이터(Moderator) : *** 교수

주제 : 폐 형상에서 질서 찾기: 좋은 폐와 나쁜 폐, 무엇이 다른가? (폐기종 사전 진단)

일 시 : 2016년 11월 25일 (금) 16시

장 소 : 공간더하기(강남역)

참석자 : ***(***), ***(****), ***(*****), ***(*****), ***(*******), ***(*****), ***(****)

발표자 : ***

발표제목: Lung Dosimetry Model

○ 개요

- 전산유체역학을 이용한 폐 내부의 공기 순환 모사계산의 장점과 한계에 대한 설명이 있었음
- MRI와 CT로 해부학적 구조가 구분이 되는 12레벨 정도까지는 영상을 이용 하고 그 아래 레벨에서 compartment model을 이용한 전산유체역학 모사 계산을 하는 것을 제안함
- 아산병원에서 이 제안을 폐기종 사전진단에 활용할 수 있는 가능성을 심도 있게 검토한 후 필요시 보충 모임을 추가로 갖기로 함

○ 발표내용

- Lung dosimetry model 란 호흡을 통해 폐에 들어온 particle의 잔여량, 잔여 비율을 측정하는 측도이다. 환경과 건강 분야에서 연구하는데 인체에 유해한 particle의 대기 중 분포도를 계산하는 것과는 별도로 인체가 폐를 통해 직접적으로 노출되는 양이 중요하다. 허파로 유입되는 공기나 이물질에 대한 측도(흡수선량)를 모델링 한다.
- 미국 환경청(EPA) 2009년 대기환경 및 인체 위해성에 대한 자료.

  Source control → Air quality modeling → Dosimetry → Health Effect
- PM (Particular Matter) dosimetry model: Lung dosimetry는 인체 실험을 통한 연구 방법과 수학적 모델링을 통한 접근법이 있다.
- Lung dosimetry 인체실험에서는 피실험자가 particle폐로 흡입하는 invasive 한 방법이 사용되기 때문에 지금에 와서는 volunteer를 찾기 어렵다.

- MRI를 이용한 CFD 모델링의 문제점: Lung dosimetry model 에 CFD를 사용하는 것은 아직 폐의 정확한 형태와 alveolar region에서의 생체적 현상을 알 수 없기 때문에 제한적일 수 밖에 없다. Airway는 bifurcation 되는 형태의 fractal 인대 CT나 MRI가 허락하는 해상도는 최대 15, 17 번째 세대의 airway 까지는 영상으로 구조를 파악할 수 있으나 airway는 보통 2^{23}까지 내려 간다고 볼 수 있다. 공기가 들어오는 입구 조건은 컨트롤 할 수 있으나 의료 영상매체를 통해 구조를 파악할 수 없는 부분의 boundary condition을 지정 할 수 없다. Elliptic PDE에서는 boundary condition이 가장 중요한대 영상매체의 해상도 문제로 boundary condition 을 알 수 없기 때문에 방정식이 아무리 잘 되어 있어도 CFD를 사용한 모델은 틀릴 수 밖에 없다. 즉 반쪽짜리 모델이 될 수 밖에 없다. 또한 CFD를 하기 위해서는 이론적으로라도 2^{23}개, 즉 100만개 정도의 airway의 위치와 모양의 차이를 반영해야 한다.
- 폐의 역할: 혈관에 산소를 공급하고, 이산화탄소를 받아 감. 이물질을 걸러서 잔류 시킴 → 폐 기능 약화
- Compartment model + Physics (세대가 내려갈수록 표면적 증가): 1-D Single Trumpet Model: 세대별 particle deposition modeling (P: concentration, V: volume), Particle의 loss factor를 고려한 model. 기존의 폐의 해부학적 모델링 이용 (15~16 세대까지는 airway만 존재하고 alveoli(폐포)는 없다. Alveoli는 그 이상 세대에 존재)
- Particle이 유체를 따라 가다 deposition이 일어남: 관성에 의한 impaction, 중력에 의한 sedimentation, Brownian motion에 의한 diffusion deposition (점착). Particle은 유체와는 다르다. Lung airway의 복잡한 기하학적 구조에 크게 영향을 받지 않고 방향전환을 하며 계속해서 나아가는 유체와는 달리 particle은 deposition에 의한 loss가 발생한다. Deposition은 다음과 같은 이유 에서 발생한다.
- Deposition pattern을 고려한 deposition model
  1. Impaction: Particle은 공기보다 density가 높다. Particle 자체의 관성 때문에 배경 유체가 이동하는 방향과는 별도의 이동을 보이는 특성이 있다. 유체와 같이 방향전환을 하지 못하고 airway path에 부딪히는데 이를 impaction 이라고 한다. semi-empirical하게 실험하여 parameter estimate를 함. Inhale할 때와 exhale 할 때를 구분하여, 실험결과 기반의 impaction deposition efficiency를 Compartment 모형에서 활용.

2. Sedimentation: 중력의 방향에 의한 sedimentation이 일어난다. Sedimentation에 의해 particle이 airway에 붙을 수 있다. 실험 data를 fitting 해서 deposition fraction을 구하여 사용하거나, 단순한 Lung airway 모델에 대한 수학식을 활용.
3. Particle 자체의 크기가 작기 때문에 Brownian motion을 보인다. particle이 10 마이크론 이하일 경우 random work를 하는대, 배경 유체와는 별도로 random walk하다 벽에 붙을 수 있다.

- Particle deposition in alveoli: flow가 alveoli에 들어갈 때의 pattern과 나올 때의 pattern 분석: Fisher et al. (2015) Sci. Rep.
- Trumpet 모델의 결과: 공중에 떠있는 particle 크기에 따른 deposition pattern 분석
- 이 모델의 장점: Bolus 타입처럼 계산을 하고 실험데이터와 비교하여 폐에 particle들이 penetrate 되는 것이 deposition fraction 입장에서 맞다는 것을 검증하였음.
- 2007년에 논문으로 출간
- Suggestion: CFD와 1D 모델을 혼합하여 complete 모델을 만들어서 사용하자. MRI와 CT 데이터를 버리지 말고 사용할 수 있는 부분에 대해서는 사용하도록 하자. 영상으로 airway pipe의 구조를 파악할 수 있는 7번째 세대 까지는 각 airway pipe 모두 pipe diameter와 length등 고유한 특성을 고려해서 CFD를 사용한다. 7번재 세대까지를 하나의 compartment로 본다. 8번째 이후의 세대, 즉 alveolar region 에 대해서는 영상으로 airway pipe 구조를 파악할 수 없으니 모든 local 한 특성을 homogenization 하여 1D 모델을 사용한다. 이러한 Complete 모델을 사용하면 local deposition을 추적할 수 있다. 7번 세대까지는 같은 세대의 다른 airway에 대해서는 locality를 보장한다. 위에서 말한 COPD의 locality 문제도 어느 정도 해결할 수 있다.
- dosimetry는 health 측면에서 보았을 때 2차적 : Dose level을 모니터링 하는 것은 health 측면보다는 환경적 측면에서 중요하다. 허파에 들어온는 오염물질의 양보다, pulmonary ventilation이 잘 되고 있는가가 더욱 인명과 직접적인 연관이 있기 때문에 health 측면에서 dosimetry는 2차적인 고려 사항이다. Lung에서의 gas flow에 대한 모델이 필요하다. Gas flow 모델은 particle과는 달리 배경 유체, 즉 공기의 유량 자체가 중요하다. 위 모델의 문제 중 하나는 모든 airway에 대해 같은 세대의 airway는 같은 유량이 간다는 가정이

너무 강하다. Airway pipeline의 구조를 MRI 영상에서 획득한 후 pipeline 별 압력 balance를 맞추어 각각의 pipeline에 도달하는 유량을 구한다. 유량에 대한 모델에 oxygen concentration과 carbon dioxide concentration을 얹으면 alveoli 에 도달하는 산소의 량을 알 수 있다. Alveoli의 표면을 통해 산소와 이산화탄소가 교환되는데, alveoli 표면의 obstruction coefficient를 구하면 pulmonary ventilation에 대한 모델을 만들 수 있다. Obstruction coefficient는 실험을 통해 측정할 수 있다. 그 외에도 혈류와 신경계 모델을 pulmonary ventilation모델과 연결할 수 있다. Blood circulation 모델은 이미 많이 있다. 또한 심장은 폐에 근접해 있다. Blood circulation 모델과 pulmonary ventilation 모델을 결합하면 순환기 시스템에 대한 모델이 된다. 허파에 들어 오는 공기가 부족하면 산소가 머리에 덜 전달되기 때문에 두뇌에서 숨 더 쉬어라고 폐에 신호를 보낸다. 이 3가지 시스템을 각각의 compartment로 보고 total circulation 모델을 만들 수 있다.

문제소개 〈*** 교수 발표 자료〉

○ 토의내용

1. 기본적으로는 removable process가 제대로 작동하지 않으면 병이 된다. 치료를 하려면 무엇을 투입해야 하나?
2. Clearing이라고 부르는데 cilia가 기도에서부터 작동함. 20 airway level 까지도 작동함. 단백질 lubricant가 들어 있는 layer가 깔려 있고 섬모들이 거기서 수영하듯이 움직이고 있다. 먼지나 금속입자, 중금속 같은 것이 들어오면 밀어 올려지는데 그 와중에 면역적으로 해가 되는 것이 감지가 될 수 있다. 그러면 거기서 염증이 생겨나게 된다.
3. 폐에 병이 생기는 것은 removable process 또는 cleaning process가 break down 되어 졌을 때에 airway에 deposition이 생기는 것이다. 염증반응을 만드는 것이 계속해서 주어졌을 때에 초기부터 염증반응이 나타나는 것인가? 염증반응 단계가 어디까지 와 있는가를 저 모델에 넣고 또는 저 모델로부터 뭔가를 측정(measure) 하여서 어느 layer에서 얼마만큼 많은 이상들이 있는지를 알아내는 것이 의학적으로는 중요한 것인가?
4. 우리가 볼 수 있는 영역의 compartment 모델의 계산(computing) 결과를 확신할 수 있다 하더라도 실제 증상과의 차이가 있을텐데 섬모 운동성과 면역 과민성

같은 걸 얼마나 고려하느냐 또한 면역성이 나타났을 때에 어떻게 될 것인 지가 사람마다 다른데 이런 것을 고려해야 한다.

5. Compartment model을 가지고 computationally 23개 layer를 만들고 각각이 branch들을 다 가지고 있다고 치고 그 뒤에 무엇을 붙일거냐 하는 것은 계속해서 bifurcation을 하는게 아니고 아까 언급하였던 type을 갖다가 정상적인 것을 80% 정도 만들고 그 이상의 level은 MRI를 이용하여 복원(reconstruction)할 수 있을 것 같다. Low level은 예를 들어 13번째 layer에 있는 것들은 80%는 정상적인 것으로 해보자. 1d model을 발표 자료에 있는 것보다 계산하기에(computationally) 좀 더 복잡하게 만들어 보자.
6. 그렇게 하면 단이 조금 다르다고 하면 constantly uniform flow rate를 가정했던 것이 깨진다. 그러면 flow를 pipe network model처럼 해서 각각의 flow rate를 얻어야 한다. 생각보다 만만치 않은 작업이다.
7. 그 정도는 실제 모델을 하고 싶다면 할 수 있는 것 아닐까?
8. 할 수 있는 범위에서 저희가 제시한 것이다. Compartment model을 하는 사람은 사실 MRI data에 대해서 관심이 없다. 왜냐하면 standard 표준 모델이 있기 때문에 그 것으로만 하는데, 내가 보니까 MRI data를 가지고 compartment model을 해도 되겠다라는 생각이 든다.
9. MRI 이미지를 가지고 level 10까지는 계산적으로(computational) 하게 할 수 있다. 그러면 거기까지는 localization이 된다.
10. Airway 당 localization이 된 것이다.
11. 1000개를 localization하고 그 다음 level은 compartment model로 나누고 compartment model을 uniform으로 만들지 말고 비율을 주고 선택을 하자.
12. 그렇게 하면 될 것 같다. COPD가 안됐던 이유가 (제가 볼 때에는) 그 generation을 전부 다 균일하게 보는데 단지 특정 부분만 percentage를 구했다. 그러면 flow rate가 바뀐 것을 counting 하기가 너무 어렵다. 그래서 그 당시에 실패한 것이다.
13. 실제 영상으로 볼 수 있는 데까지는 실제 계산을 하고, 그 다음에 안되는 것들에서는 continuum하고 discrete한 것들을 hybrid model로 연결시켜야 한다. 그러니까 과거에 했던 것처럼 compartment 모델을 하나로 한 것이 아니라 1000개를 사용해야 한다. 그래서 local하게 physiological 한 parameter들이 차이가 있다는 것을 보여줄 수 있다.

14. 또 하나 오늘 것하고 직접 관련이 있는 건 아닌데, 폐 영상에서 shape에 marker를 붙이면 breathing을 할 때 그 cycle에 따라서 marker를 follow 할 수 있나? 만약 그렇다면 stiffness를 볼 수 있고 rough 하게라도 volume의 변화를 볼 수 있다. 위치에 따라 확장된 것을 볼 수 있는데 윗부분이 많이 늘어 났어야 하는데 상대적으로 밑에 것보다 늘어나지 않았다면 윗부분에 뭔가 문제가 있는 것이다. 그래서 CFD로 문제를 풀지 말고 폐가 elastic material이라고 가정하고 homogenize된 stiffness를 영상화하는 것을 생각해 볼 수 있다.
15. 사실 그런 스터디를 지금 하고 있다. COPD 환자 같은 경우에 엑시마가 있는 지역이 움직이지 않는데, 어떤 빈주머니는 주변 조직보다 많이 움직이는 때가 있는가 하면 어떤 조직은 움직이고 않고 가만히 있다가 자기 혼자 동떨어져서 움직이는 경우가 있다. 암이 있으면 암은 움직이지 않는다.
16. 완전(Complete) 모델을 만드는 것은 어렵지만 alveoli가 1000개 있는 클러스터를 만들어 놓고 여러 개의 변수(parameter)를 고려하자. 예를 들어 deposition이 많이 되었다거나 염증반응이 있다거나 등등 이러한 것들을 가지고 homogenization 됐다고 치고 국소적(local)으로 계산(computation)을 하여서 우리가 관측할 수 있는 특성(property)들과 비교하여 보자. 즉 외부에서 전체적(global) 관측할 수 있는 답들과 컴퓨터 시뮬레이션(computer simulation) 결과를 비교해 보자. 여러 변수(parameter)들을 다르게 준다면 homogenized 되어 진 결과들이 나올 수 있을 텐데 이런 식의 계산도 의미 있을 것 같다.
17. 열다섯 세대 정도까지는 영상을 이용할 수 있다고 했지만 현실에서는 그건 좀 무리이고 좀 덜 해야 할 것 같다. compartment 모델은 trumpet 모델이기는 하지만 그 자체로도 의미가 있을 것 같다. 지금 사람들이 제일 많이 연구하고 있는 것은 실제로 PM 10나 PM 2.5 같은 먼지가 deposition 되는 위치와 염증이 일어난 위치, 그리고 병이 일어난 위치가 서로 correlation이 있느냐 하는 것인 데 아직 모르는 영역이다. 지금까지 언급한 것처럼 한 voxel 뿐 아니라 모든 alveoli를 보려는 그런 식의 접근이 영상에서는 좀 흔한데, 1000개 정도 compartment를 보면 충분한 것 같다.
18. 1000개의 1-d compartment를 만든 다음에 1000개 각각의 끝에 length direction에 대한 다른 parameter들을 branch 별로 붙일 수 있다.
19. MRI image를 가지고 1d model을 각각의 airway들에 대해서 만드는 게 계산도 절약되고 더 좋은 결과를 줄 것 같다. 20. Airway들의 모양은 균등하지 않으며 벽면의 지형도 사람마다 차이가 있다. Airway의 모양에 따라 유동 패턴이 달라진다.

또한 유동은 constant하지 않다. 수학적 모델링이 어렵기 때문에 semi-empirical 한 실험을 한다. 실험을 통해 parameter estimation을 한다. Inhale할 때와 exhale할 때를 나뉘어서 두가지 다른 수학적 모델을 사용한다. 실험 자체는 Y자 튜브를 만들어서 수행.

20. 파이프가 기울어져 있을 경우, 올라가고 있는 파이프 uphill과 내려가고 있는 파이프 downhill이 있는대 유동이 constant flow rate를 보인다 하더라도 particle에 대한 중력의 영향과 이에 따른 부딪힐 확률이 다르다. 이럴 average 해서 모델을 revise할 수 있다.
21. 입 모양은 개인차가 심해서 표준 모델을 만들 수 없다. Nasal cavity는 구조가 복잡하기 때문에 particle의 impaction확률이 높아 deposition이 많이 일어나기 때문에 중요하다. nasal cavity 에서의 deposition을 구하려면 patient specific하게 CT를 촬영하여 CFD를 할 수 있다.
22. Alveoli는 periodic 한 움직임을 보이는대 inhale할 때의 패턴과 exhale할 때의 패턴이 다르며 이에 따라 inhale할 때 particle이 부딪히는 모습과 exhale할 때 particle이 부딪히는 모습이 다르다. Alveoli 벽면의 변형과 이에 따른 유동에 대하여 immersed boundary method로 접근해 보았다. Aveoli 벽면이 iso-geometric하고 isotropic하게 팽창한다고 idealization을 alveoli에 들어오는 유체의 volume이 단순하게 일시적으로 증가하고 또 축소하는 상황을 고려하여 모델을 만들었다.
23. CT에서 얻은 영상은 smoothing 처리를 거친 영상이며 smoothing 정도에 따라 deposition이나 유체역학이 많이 달라진다.
24. Lung은 rigid한 기관이 아니다. 숨을 들이쉬었을 때와 내 쉬었을 때에는 lung의 volume에는 큰 차이가 있다. Lung의 elasticity라는 time varying feature 즉, airway pipe의 크기 변화를 반영하여 CFD를 하지 않으면 error가 있을 수 밖에 없다.

제 3 절 제2차 문제해결 워크숍 (라운드 테이블 II의 문제해결)

1) 모더레이터(Moderator) : *** 박사

제 목 : 산업수학 문제해결 워크숍

일 시 : 2017년 2월 3일(금) - 4일(토)

장 소 : 부산 해운대 씨클라우드 호텔

참석자 : ***(***), ***(***), ***(***), ***(***), ***(***), ***(*********), ***(*********), ***(***), ***(***), ***(***), ***(***), ***(***), ***(***), ***(***), ***(***), ***(***), ***(***), ***(***), ***(*********), ***(*****), ***(***), ***(**), ***(****), ***(***), ***(***), ***(***), ***(***), ***(***), ***(***), ***(****), ***(***), ***(****), ***(***), ***(***), ***(***), ***(***), ***(*********), ***(*********), ***(*********), ***(***), ***(***), ***(***), **(*********)

2) (주)타키온테크 문제소개

○ ********* ******** *** :

산업수학혁신센터가 최근에 발굴한 산업문제는 (주)타키온테크라고 하는 스타트업 기업의 문제이다. (주)타키온테크의 주 상품은 불량 지 소프트웨어인 Quality Guard로 생산할 때 발생하는 힘 데이터 파형을 바탕으로 제품이 정상인지 아닌지, 공구가 마모되었는지 아닌지를 자동으로 판단해주는 프로그램이다.

○ ***** **** *** :

(주)타키온테크는 스마트 팩토리 솔루션의 일환으로 자동모니터링과 불량 지를 감지하고 예측하는 Quality Guard 소프트웨어를 개발한 스타트업기업이다. QG는 CNC머신에 특화된 소프트웨어로 CNC는 컴퓨터 수치제어 방식을 말한다. 재료가 회전해서 가공을 하는 CNC 선반이 존재하고 공구 자체를 회전시켜서 가공을 하는 CNC 밀링 등이 있다.

○ 개요

- Quality Guard 작동 방식 : 각 CNC머신과 클라이언트를 LAN선으로 연결하여 공정 중에 발생되는 데이터를 밀리세컨드 단위로 수집함. 이를 통해 공구를 최적의 상태로 교체시기를 알려주고 제품이 정상적으로 생산이 되는지 분석을 함. 또한 각 클라이언트에서 모인 데이터를 서버로 보내서 여러 공정에서 정상적으로 가공이 이루어지는 지 모니터링 서비스를 제공함
  가공 Load Data → 표준 패턴 분석(클라이언트) → 1차 위험 감지 : 정상, 불량판정 고차원 패턴 분석(서버) → 2차 위험 감지 : 정상, 불량 판정 → 모니터링
- 정상 제품 로드 파형과 불량품 로드 파형은 파형에서 눈에 띄는 차이가 발생함. 관리자가 모든 부분을 다 지켜볼 수 없기 때문에 이런 파형분석을 통해 기계를 비상으로 정지 시키고 조치를 취할 수 있게 해줄 수 있음

- 다른 글로벌 업체의 경우는 센서를 부착해서 로드 데이터를 수집하는 반면 (주)타키온테크에서는 추가 센서 장착 없이 머신에서 나오는 기본 데이터만을 이용해서 분석하기 때문에 데이터 분석에 필요한 알고리즘이 역할이 중요함
- 정상 데이터로부터 정상 데이터를 학습하고 불량을 판단하는 구조로 정상 파형의 기본 파형에 편차들을 두어 정상 범위의 터널을 만들어서 1차적으로 불량을 감지함. 각 공정마다 그 공정에 맞는 검증 방법을 추가하게 되는데, 여기에서 수학적 도움을 받고자 함. 수학적으로 Feature를 적용해서 정상 파형과 불량 파형의 두드러진 차이를 찾고자 함

○ 문제의 특징과 예상 문제점

1. 녹색 터널을 통해 1차적으로 위험을 감지하는데 터널 내에 존재하는 파손 파형이 발생할 수 있음. 파형의 Shape등으로 파악할 가능성 있음
2. 1차 가공 후에 2차로 정밀 가공인 정삭과정에서 불량 파형이 발생할 때, 터널 안에도 들어오고 shape도 정상파형과 비슷한 경우가 발생할 수 있음. 이런 여러 가지 형태를 고려할 수 있는 범용적 알고리즘 개발이 필요함
3. 나사 가공에서 나사 끝의 팁이 살 짝 나가는 경우에는 암수 나사를 돌려보며 눈으로 체크하는 수 밖에 없음. 그러나 마모가 된 팁으로 생산할 때 나오는 파형은 정상 파형과 큰 차이를 보임
4. 데이터의 싱크가 틀어지는 경우가 존재. 이런 것들을 틀어지지 않게 조절할 필요가 있음
5. 주말에 공정을 멈추고 다시 월요일에 기계를 가동시킬 때 구리스 등의 여러 가지 요인들 때문에 전체적으로 파형이 올라가게 됨. 즉, 편차값이 커지면서 녹색터널의 폭이 넓어져 터널링으로 불량을 검출하기 힘들어짐

○ 목표

1. 각 공정의 특징에 맞게 잘 적용되고 실제 현장 사항에 잘 맞는 알고리즘 개발
2. 불량 검출률 95% 이상, 오판률 0.1% 미만으로 엔지니어가 크게 제어하지 않아도 될 정도의 자동화가 가능하도록 함

3) (주)타키온테크 문제해결

일시 : 2017년 2월 3 - 4일

장소 : 부산 해운대 씨클라우드 호텔

Team A : **, ***, ***, ***, ***, ***, *** Team B : ***, ***, ***, ***, ***, ***, ***, ***

Team A

아이디어 1 : Sampling

○ IDEA

- 데이터의 파형을 지문의 분기점처럼 공정과정 중에 발생하는 물리적, 기계적 특징점의 sampling을 통해 데이터의 비교 및 분류

○ Motive

- 지문 감정 방법 : 지문 전체의 모양을 보는 것이 아니라 “분기점”이라는 부위를 8부위 이상 추출하여 비교하는 방법을 통해 같고 다름을 분류

※ 향후 계획 : 업체와 논의하여 물리적, 기계적 특징점을 sampling 할 계획

아이디어 2 : Matrix

○ IDEA

- $n-1$개의 정상파형(n-dimensional vector)과 1개의 비교대상 파형을 이용하여 $n \times n$ 행렬을 만들어 행렬이 가지고 있는 성질 분석법 (eigenvalue, determinant 등)을 이용하여 파형의 정상 비정상을 판단

○ 문제점

- Sync가 맞춰져 있어야 시도 가능

※ 향후 계획 : 기업이 가지고 있는 sync 해결 방법과 기존에 논의 되어진 sync 관련 내용을 바탕으로 sync 문제 해결 후 재시도 계획

아이디어 3 : Space spanning

○ IDEA

- 정상파형과 검사하고자 하는 파형 사이의 거리(norm)를 계산하여 파형의 정상 비정상을 판단 문제점

○ 문제점

- Sync가 맞춰져 있어야 시도 가능

※ 향후 계획 : 기업이 가지고 있는 sync 해결 방법과 기존에 논의 되어진 sync 관련 내용을 바탕으로 sync 문제 해결 후 재시도 계획

아이디어 4 : Data renewal

○ IDEA

- 기존에 논의 되었던 미분($f(n)-f(n-1)$)이 아닌 시작점을 고정시킨 $g(n)=f(n)-f(0)$라는 새로운 데이터에서 FFT등의 분석법 적용

○ Motive

- Sampling : Sampling에서와 마찬가지로 기존의 자료를 이용하여 새로운 데이터를 생성하여 분석을 시도해보고자 함

※ 향후 계획 : 기업이 가지고 있는 sync 해결 방법과 기존에 논의 되어진 sync 관련 내용을 바탕으로 sync 문제 해결 후 재시도 계획

아이디어 5 : 시계열 분석

○ IDEA

- 시계열 분석을 통해 나오는 데이터를 보는 것이 아니라 시계열분석 중 발생하는 예측치를 비교하는 방법으로 새로운 정상 범위 밴드를 만들어 분석하고자 하는 파형 조사

○ Motive

- 시계열 분석, Data renewal : 기존의 시계열 분석과 Data renewal에서의 새로운 데이터 생성을 한번에 시도해보고자 함

※ 향후 계획 : 정상파형의 시계열 분석 예측값 분석과 정상 범위 밴드의 설정 후 비정상파형과의 비교 계획

Team B

아이디어 1 : Correlation

○ IDEA

- Template과 데이터와의 Correlation을 계산하여 만들어진 새로운 파형의 FFT를 구한 후, 0을 제외하고 가장 작은 2-3개의 frequency만 가지고 그 차이를 알아냄
- 주어진 데이터의 크기가 각기 다르고 sync를 고려하지 않아도 되어 편리함

○ 문제점

- 눈으로 판단하기 어려운 파형에는 여전히 불확실

※ 향후 계획 : 더 많은 데이터를 가지고 확인해 본 후 일부 공정에만 한정하여 사용하는 방안을 업체와 검토

아이디어 2 : Spectral Density

○ IDEA

- 데이터의 시계열 구간을 설정한 후 FFT 등의 주파수 변환을 통하여 주파수 밀도를 찾을 수 있음
- 파형에 따른 주파수 밀도가 다르므로 기본주파수 밀도의 크기 f_0와 그 주파수의 배수들 $k*f_0$의 크기와의 비율을 관찰함(sync를 맞출 필요 없음)

○ 문제점

- 실제 데이터로 실험해 본 결과 그 비율의 차이가 눈에 띄게 다르지 않아 적절한 기준이 필요함

※ 향후 계획 : 각 공정마다 다른 주파수 파형이 나오므로 초기 세팅이 중요하여 업체와 상의하여 고안해야 하고 기존의 터널 방법과 병행할 것을 권장함

아이디어 3 : Total Variation (*** 교수)

○ IDEA

- Total Variation(즉, 데이터 앞뒤 차이의 총 합) 하나의 값으로 오류 파형과 정상 파형의 차이를 알 수 있고 별도의 변환 없이 간단한 계산으로 판단이 가능하여 효과적임(특히, 마모의 예상이 가능)

○ 문제점

- 앞부분에 포함되어 있는 실 공정 이전의 데이터에 따라 오차가 생길수 있어 시작점을 정하는 것이 해결되어야 함

※ 향후 계획 : 분산과 Total Variation을 같이 살펴보는 것이 좋을 것 같고 각 공정마다 정상 범위가 다르므로 업체와의 조율이 필요함

1. 문제 : 절삭가공작업에서 부품의 파손 등을 통한 불량품을 찾아내는 것. 주어진 데이터로 모터 전류 등에서 얻어지는 토크나 힘 데이터를 읽어 불량 상태를 판독하는 법을 개발.
2. 기존 기술의 개요 : 정상 상태의 데이터 그래프를 기반으로 데이터가 허용되는 터널을 설정하여 터널 밖에 나타나는 데이터가 있을 경우 불량으로 판정. 이 경우 터널 안에 머무는 데이터 중에서도 불량품이 생기는 경우도 나타난다.
3. 산업수학 워크숍에서 제안하는 방법 : 절삭가공작업 내에서는 여러 가지 공정이 포함되어 있어 한 가지 방법으로 모든 공정에 적용되는 방법은 불가능하고 각 공정에 따른 개별적인 방법들을 고안해야 한다. 터널 판정법에는

적용되는 힘만을 가지고 판독하나, 실제 데이터는 시계열 자료로 주어진다. 적당한 시계열 구간을 설정하여 주파수 변환(Fourier Transform) 등을 통하여 주파수밀도(Spectral Density)를 찾을 수 있다. 주파수 밀도에서는 가공 기계의 회전수에 따른 기본 주파수 밀도가 가장 크게 나타난다. 파형에 따른 주파수 밀도가 다르므로 기본 주파수 밀도의 크기와 기본 주파수 밀도의 배수의 크기와의 비율들을 관찰하므로써 불량품을 판정할 수 있다. 간단히 요약하면 터널 방법과 기본 주파수 밀도 함수의 크기를 동시에 고려하면 터널 방법에서 찾지 못하는 불량품들을 찾을 수 있다. 각 공정마다 다른 주파수 파형이 나오므로 각 공정에 따른 기본 주파수의 밀도를 찾아야 한다. 파형들에 따른 결정 알고리즘은 현장 기술자와의 상의를 통해 고안해야 할 것이다.

4) 모더레이터(Moderator) : *** 교수

5) 블리 문제해결

○ 블리 *** :

뼈나이를 자동을 판독해줄 수 있는 솔루션 제공하고자 함. 학부모들의 가장 큰 걱정거리 중 하나는 자녀들의 키가 얼마나 클 수 있는가 인데, 이것을 판단하는데 가장 많이 쓰이는 방법이 뼈나이를 측정하는 것이다. 이것들은 왼손 X-Ray를 찍어 레퍼런스 책을 참조하여 측정을 하게 되는데, 의사들은 이것을 단순한 작업으로 보고 있으며 그림 맞추기라고 까지 폄하하기도 함

○ 개요

- Blee에서 하는 방법은 TW3라는 방법으로 가장 최근에 나왔고, 정확도가 높음. 뼈의 13군데 ROI(관심영역)의 골 성숙도에 따라서 뼈마다 specification이 있는데 그것의 rule에 맞추어 가장 적합한 사진을 찾아 각 ROI 별로 다 찾아서 최종적으로 수식에 넣어 뼈나이를 측정함. 대략 7-10분 걸리는데, 금액은 높지 않아 의사는 별로 하지 못하고 자동화 솔루션이 필요
- Deep Learning 기술 중 Convolution Neural Network를 사용하여 원본 이미지를 국소적으로 분석하여 분류함. 이것은 Classification 문제. 다음으로 Localization 문제로 이미지 안에서 정확한 대상의 위치를 찾아내는 것
- Filter를 보면 learning을 제대로 못해서 뻥 뚫린 부분이 존재함. 데이터가 적어서 발생하는 문제와 Hyper Parameter를 보완해 주어야 하는 문제가 있음

- ROI를 찾는 것은 대체로 제대로 찾음. 현재 남아있는 Issue는 다음 네 가지가 있음

1. Classification하는 accuracy를 높이는 문제
   - Nueral Network에서 Neuron 사이에서 output이 정규분포를 가지지 않고 한쪽으로 치우쳐서 다음 layer로 넘어갈 때 learning을 잘못하는 문제
2. 초기화 값을 어떻게 설정하는가 하는 문제
3. Activation Function이라고 하는 선형적인 것을 비선형적인 것으로 바꾸어 주는 함수로 어떤 것들을 선택할 것인지에 관한 문제

Blee 문제에 대한 *** 교수의 자문평

1. 문제 : X-ray 사진에서 골절된 부위를 찾는 문제이다. 골절된 부위와 형태가 매우 다양하게 나타나서 정확한 판정을 하기 위한 딥러닝 방법을 적용하는 기술을 적용할 예정이다. 딥러닝 방법의 향상을 위한 수학적 이론을 찾고자 한다.
2. 딥러닝 방법의 개요 : CNN(Convolution Neural Network)을 기반으로 영상문제에 딥러닝이 성공적으로 적용되어 최근에는 이 에대한 이론과 응용이 학계의 주류적인 추세이다. 이 경우 여러종류의 필터들을 고안해야하고 복잡한 네트 워크를 형성해야한다. Feature Map들의 층수도 점진적으로 증가하여 수백층의 Layer들을 쌓는 복잡한 문제들도 연구되고 있다. Blee 회사에서는 X-ray 사진 에서 부분영상사진들을 골절된 부위 중심으로 추출하여 기계학습의 기본 데이터로 삼고 있다. Layer의 층수는 약 20 - 30개 정도를 쓰고 있고 X-ray 사진수는 1500여 개이다. 보편적인 딥러닝 방법을 적용하고 있으나 성공적인 판독이 잘 안되고 있다.
3. 산업수학 문제해결 워크삽에서 제안한 방법 : 딥러닝 알고리즘은 대상확정(object identification)이나 분류(classfication)에서 성공적으로 적용된 알고리즘 을 채택하고 있으나, X-ray 사진문제에서는 골절된 부위의 영상이 매우 작고 다양한 형태로서 대상확정이나 분류에서 쓰이는 알고리즘을 점진적으로 변형해야 한다. 제안하는 방법은 다음과 같다. 첫째, 방법의 성공도를 계량화함 (cost metric). 둘째, 딥러닝의 구조상 초기 비중(Initial Weight)에서 부분최솟값을 찾으므로 필터의 초기값을 랜덤하게 선택. 셋째, 마지막으로 필터의 변경에 따른 Cost metric 함수의 평가를 통하여 새로운 네트워크 구성. 넷째,

딥러닝의 성공은 학습데이터의 수량에 의존하므로 되도록 많은 학습데이터를 확보해야 한다.

제 4 절 해외 문제해결 사례

1) 해외 산업수학 문제해결 워크샵의 결과로 도출된 산업문제 해결 사례

○ 유럽을 비롯한 산업수학 선진국에서는 Study Group with Industry 혹은 Mathematical Problems in Industry workshop 이라 불리 우는 산업수학 문제 해결 워크샵이 개최되어, 산업계의 문제를 수학적인 접근방법을 이용하여 해 결하려는 노력을 기울이고 있다. 통상 5일간의 학회기간을 가지며 첫 날 기업의 인사가 직접 문제를 제시하고, 수학자들과의 협력의 과정을 거쳐 마지막 날에 그 동안의 해결 정도를 발표하는 방식으로 이루어진다. 아래의 표는 해외의 경우 해결된 여러 사례들을 정리한 것이다.

연번	개 요		기업 문제	해결 내용
1	미국 ('14.6월) ('15.6월)	(주관) IMA*, 델라웨어대학 * 미국국립과학재단이 설립한 미네소타내학 내 응용수학연구소 (기업) Standard & Poor's Ratings Services ※ 금융서비스 회사	·기업의 리스크 신용평가 방법인 부도율 예측하기	·확률분포의 차이를 계산하는 함수를 이용하여 예측의 정확성을 높임
2		(주관) IMA*, 델라웨어대학 (기업) Bloom Energy ※ 연료전지 제조업체	·천연가스에서 연료 전지 생산을 위한 황산 성분 제거	·수학적 모델링으로 황산성분을 제거하는 타임스케일을 구함
3	영국 ('14.11월)	(주관) Smith연구소, 옥스퍼드 대학 (기업) Tesco ※ 세계적 유통기업	·상품 가격변화에 따른 온라인 고객수요 예측 ·400개 상품에 관한 과거 2년 데이터	·실수요와 일치하는 가격 예측함수 제공
4		(주관) Smith연구소, 옥스퍼드대학 (기업) Aralia Systems Ltd ※ 지능형 관제 솔루션 제공업체	·저화질 MPEG 비디오 영상에서 특정한 색깔을 가진 물체를 탐색	·원하는 색깔만 추적하는 알고리즘 개발
5	일본 ('15.8월)	(주관) IMI* * 큐슈대 산업수학 연구소 (기업) NIPPON STEEL & SUMITOMO METAL CORPORATION ※ 일본최대규모 철강회사	·재료의 기계적인 성질을 구명하는 결정구조에 대한 수학적 묘사 문제	·수치해석을 이용하여 재료 결정의 균열과 에너지에 대한 근사해를 구함
6		(주관) IMI (기업) NEC Corporation ※ 다국적 전자/통신기업	·교통정체 해소를 위한 교통흐름의 모델링	·정체가 될 확률을 밀도함수로 표현, 도심에서 차량이 빠지는 상황을 시뮬레이션
7	네덜란드 ('14.2월)	(주관) NWO*, STW** * 과학연구지원 단체 ** 과학기술 분야 연구재단 (기업) HZPC ※ 세계최대 씨감자 공급업체	·프렌치프라이 업체에 공급하는 감자의 시장 가격 정량화 문제	·감자가 잘라지는 모양에 따라 결정되는 프렌치 프라이의 양과 변수를 예측 ·시장가격 결정 알고리즘 구현

연번	개 요		기업 문제	해결 내용
8	호주 ('14.3월)	(주관) ANZIAM** * 호주수학회 응용수학분과 (기업) Fonterra Cooperative Group Ltd ※ 국제적인 유가공 업체	·치즈를 소금물에 절이는 시간에 따른 염도 및 수분 함량을 예측하는 문제	
9	아일랜드 ('11.9월)	(주관) MACSI*, 리메릭대학 * 리메릭대학 산업수학연구소 (기업) HZPC ※ 세계최대 씨감자 공급업체	·전기료 예측가능성 분석 ·전기제공업체의 전기 요금제에 따른 고객계층 파악	·예측 전기료와 실제 전기료 차이의 발생 시점 확인 ·회사의 전기요금표에 적합한 고객 측정 방법 개발
10	폴란드 ('10.10월)	(주관) 폴란드과학원 시스템연구센터 등 (기업) 폴란드조폐창	·장기간 저장이 요구되는 데이터 저장장치의 데이터 무결성 확보	·암호학적 기술을 적용하여 디지털 데이터의 무결성 향상

〈표 4.2〉 해외 산업문제 해결 사례

2) 최근 해외 산업수학 문제해결 워크샵에서 제시된 산업문제들

○ Mathematics in Industry Study Group 2016 (MISG 2016)

- 2016년 2월 1일 ~2월 5일, 남호주대학 (Adelaide, Austrailia)
- 문제 (a) Inference in a knowledgebase (DST group)
  - ▷ "행동 기반 정보"및"실체 분해"와 같은 지식 베이스를 활용해 정보 분석가들의 추론을 돕고자 함. 특히 DST 그룹은 지식 베이스를 활용하는 솔루션이 scalability, useability, transparency를 가지길 원함
- 문제 (b) Sequencing ore extraction to control blend quality (Schneider Electric)
  - ▷ 광산 내에 산재해 있는 여러 광물 채취장(pit)의 채굴 순서를 결정하는 것
  - ▷ 일반적으로는 각 채취장의 광물분포가 결정돼 있다고 가정하고 채굴순서를 결정하는 것이 통상적인 작업이나 이번 스터디그룹에서는 광물분포가 불확실한 가정 하에 최고의 기댓값을 갖는 작업순서를 결정하는 것을 문제로 제시
- 문제 (c) Modelling water pollutant density associated with surface water runoff (SA Water)
  - ▷ 지표수 유출과 관련된 수질 오염 물질의 밀도에 관한 모델링
  - ▷ 원수 품질을 유량이 정점인 시간에 측정해야하지만, 항상 이렇게 하는 것은 불가능하므로 땅위에 흐르는 빗물이 생기는 사건의 범위를 캡처하기 위해 샘플링을 최적화하고, 유량이 정점일 때를 포함하여 다양한 조건 하에서 오염밀도를 어떻게 예측할 수 있을 것인가에 대한 문제

- 문제 (d) Optimisation of household PV and storage (Ergon Energy)
  - ▷ 에너지 중개의 최적화 값을 도출
  - ▷ 분산 설치된 배터리는 에너지 중개기업에 생산된 전기에너지를 제공할 수 있고 전기에너지의 현재 가격에 따라 공급양을 조절할 수 있는 바 이러한 환경에서 적정 PV 개수, 전기에너지의 저장량 조절, 가격정책의 최적값을 구하는 문제

○ Study Group Workshop 2016 (SGW 2016)

- 2016년 7월 26일 ~8월 2일, 규슈대학교, 도쿄대학교
- 문제 (a) Transpower NZ Ltd.(뉴질랜드의 전력회사)
  - ▷ Inter-regional variability of solar irradiance and implications for future solar PV generation on the New Zealand power system

  Murata Manufacturing Co., Ltd.(일본의 전자부품 제조 및 판매회사)
  - ▷ Mathematical Modeling of Human Body for Electronic Biosensing
- 문제 (c) JAMSTEC(일본해양연구개발기구)
  - ▷ Climate prediction at JAMSTEC and a couple of current mathematical problems relating to them
- 문제 (d) I2CNER(탄소중립에너지 국제연구소)
  - ▷ Description of heterogeneous rock pore structures using mathematical methods
- 문제 (e) NIPPON STEEL & SUMITOMO METAL CORPORATION
  - ▷ Mathematical Description Concerning Anisotropy of Grain Boundary Energy for Metals
- ABeam Consulting Ltd
  - ▷ Detecting the abnormal state of equipment through analyzing multimodal sensor values

○ European Study Group with Industry 123rd (ESGI 123rd)

- 2016년 10월 23일 ~10월 30일, 러시아 상트 페테르부르크 Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University
- 문제 (a) BOSCH (자동차 및 산업 기술, 소비재 및 빌딩 기술 분야의 선도적 기업)
  - ▷ Potential of a vortex: Calculate potential of a single vortex analytically

▷ Overlap spherical harmonics: Calculate overlap between spherical harmonics analytically

• 문제 (b) Powerflute (종이 및 포장 회사)

▷ Collapse of paperboard packages: What causes the accelerated creep? How to design packages to resist load better?

▷ Task: From the provided experimental data, determine a time- and moisture-dependent material model for paperboard. Implement the material model to finite element software. Use finite element simulations to investigate creep behavior of paperboard packages under cyclic humidity conditions.

• 문제 (c) AIRBUS(세계적으로 유명한 항공기 제조회사)

▷ Optimization of fastener distribution during airframe assembly: For a given cloud of initial gaps and given number of fastening elements find the disposition of fasteners providing minimal number of nodes with computed gap exceeding given level.

○ Mathematics in Industry Study Group 2017 (MISG 2017)

• 2017년 2월 11일 ~2017년 2월 19일, 호주 애들레이드 남호주대학교University

• 문제 (a) SAPN(남호주에 전력을 공급하는 기업)

▷ 전기요금 가격 책정 및 시스템 제어

- 각 가구별로 충전 또는 소모한 베터리양, 사용한 에너지양, 구매 또는 판매한 전력량이 집계되어 데이터를 바탕으로 게임이론, 최적화이론, Fourier series 등을 이용하여 효율적인 에너지의 운영방법 탐색.

• 문제 (b) TTG(세계 여러 나라의 철도회사에 효율적인 철도 운영방식인 Driver Advisory System (DAS)을 제공하는 기업)

▷ 열차지연분석

- 운행열차의 10초 간격의 시간별 위치와 역을 기준으로 한 운행정보들의 데이터로 열차 지연이 발생하는 원인을 유형별로 분류하여 각각의 특성과 살피고, 대응방법을 탐색.

• 문제 (c) RAA (남호주의 최대 보험회사)

▷ 도로 단속 카메라와 충돌사고의 관계

- 교통사고를 감소시키기 위해 설치한 단속카메라가 효과가 있었는지 과학적으로 확인하고자 함.

- 1996년 이후 발생한 충돌사고에 대하여 사고의 강도, 사고지점의 단속카메라의 유무가 기록된 데이터를 이용하여 통계적으로 유의한 차이를 일으키는 지 확인

• 문제 (d) DST 그룹(호주 국방부 소속의 연구개발 기업)

▷ 천음속항력계수 추정

- 탄체의 초속 및 종속, 발사고각, 최대높이 사거리 등을 포함된 데이터를 이용하여 탄체의 항력 계수를 추정할 수 있는 수학적 모델을 얻고자 함.

제 5 절 산업수학 간행물 발간

○ 별도의 간행물 발간을 대신하여 산업수학과 관련된 활동사례와 연구현황을 대한수학회 소식지에 게재하였다.

1. 대수학과 부호론을 활용한 보드게임
   - 글쓴이 : 김종락 (서강대학교, (주)감성수학레드 CEO)
   - 대한수학회 소식지 169호, 2016년 9월
2. 호주 산업수학 문제해결 워크샵(SGW 2016) 참관 후기
   - 글쓴이 : 우영호 (국가수리과학연구소 산업수학혁산센터 선임연구원)
   - 대한수학회 소식지 170호, 2016년 11월
3. 산업수학의 소개와 현황
   - 글쓴이 : 최희준 (연세대학교, 응용해석 및 계산센터 센터장)
   - 대한수학회 소식지 171호, 2017년 1월
4. 국가수리과학연구소 산업수학혁신센터 활동 소개
   - 글쓴이 : 정재원 (국가수리과학연구소 산업수학혁신센터)
   - 대한수학회 소식지 171호, 2017년 1월
5. 인공지능 로봇의 하루
   - 글쓴이 : 김종락 (서강대학교, (주)감성수학레드 대표)
   - 대한수학회 172호, 2017월 3월

○ 향후 계획

- 대한수학회 홈페이지 등에 산업수학 관련 탭을 신설하여 산업과 수학계와의의 협력현황과 성공사례를 게시 예정
- 현재 진행 중인 산업수학 점화프로그램 백서 제작 등을 통하여 국내 산업수학의 성공사례 등을 공유할 예정임

제5장 산업수학 Curriculum

제 1 절 들어가기

4차 산업혁명 시대에 필요한 최소한의 소양으로써 코딩 능력을 꼽을 수 있다. 지능 정보화 시대의 화두는 얼마나 빠른 시간 안에 새로운 대상을 배울 수 있는 학습능력이라고 할 수 있다. 새로운 직업군의 탄생과 기존에 존재하지 않았던 산업의 출현으로 인하여 생겨난 환경에 적응할 수 있는 인재의 양성을 필요로 하고 있다.

국내에서 산업수학이 실질적인 성과를 도출하기 위해서는 장기적인 안목에서의 인재양성과 그에 따르는 교육과정의 개편이 전제되어야 한다. 기존의 도제식 교육과정은 경쟁력을 잃어 가고 있으며 새로운 인재의 양성에 있어서도 낡은 틀을 제공할 뿐이다. 이에 대학에서의 전면적인 커리큘럼 개편이 바람직하나 교육의 특성상 점진적인 변화를 위한 대안을 제시하도록 한다.

제 2 절 학부에서의 커리큘럼 개편 필요성

수학의 특성상 학부교육의 특성은 전공의 필요한 이론 과목들을 이수하는 것으로 되어 있다. 이는 대학원 진학을 위한 학생들을 위해서는 바람직 할지 모르나 대학 졸업 후 취업을 원하는 학생들의 니즈와는 상당한 거리가 있다. 수리계산과 수리모델링의 전공트랙을 신설하거나 산업수학의 입문과 같은 과목을 개설할 필요가 있다. 또한 인턴과 같은 실습체험을 통해 구체적인 문제 해결의 경험을 가질 수 있도록 지도할 필요가 있다. 단, 수학전공자로서의 강점인 생각의 습관, 엄격한 사고, 신중한 추론에 대한 자신 을 겸비해야 한다.

제 3 절 대학원 교육과 새로운 교육과정의 대안: 전문이학석사(PSM)

수학과 대학원에서의 석사과정은 박사과정을 위한 전단계로 치부되고 일부 연구중심 대학에서는 박사과정 중 탈락자에게 석사학위를 주는 등 가볍게 취급되고 있는 것이 현실이다. 그러나 산업수학 분야에서 새로운 전문이학석사(PSM) 프로그램이 새로운 대안으로 주목 받고 있다.

이는 산업계에서 필요로 하는 맞춤형인재를 양성하는 것으로 기본적으로는 과학계산, 수학적 모델링, 커뮤니케이션 교육, 실습과 프로젝트 수업 등으로 정리할 수 있다. 이에 대한 자세한 내용은 다음과 같다.

1) PSM의 정의

○ Professional Science Master's 의 줄임말, 전문이학석사라고 번역
○ PSM 개념의 정의:
  - 대학원 졸업생이 석사수준의 과학 또는 수학 지식을 보유하고 있고 비즈니스 기초, 비즈니스 윤리, 프로젝트 매니지먼트, 팀 조직 및 커뮤니케이션 능력 등의 깊이 있는 비즈니스 능력을 구비하는 것이다.
○ 과학 및 수학 분야의 MBA라고도 불리워짐

2) PSM의 역사

○ 1997년 슬로안 재단이 자연과학과 수학에서의 프로그램 설립지원을 위하여 14개 대학들에게 보조금을 지급함으로써 도입되었다.
○ 2001년 슬로안 재단은 대학원위원회(CGC)가 과학/수학의 석사교육에 중점을 두는 석사 중심 교육기관으로 PSM 계획을 확장시킬 수 있도록 보조금을 지급했다.
○ 2005년 주립대학의 여러 캠퍼스에서 PSM 프로그램을 채택하도록 자금을 지원
○ 2007년 미국경쟁력 강화법은 국립과학재단(NSF)이 전문이학석사를 지원하는 것을 승인
○ 2008년 미국국립학술연구원(NRC)의 보고서에서 이 학위의 중요성을 강조하였다.
○ 2010년 모든 PSM프로그램은 CGC가 개발한 가이드라인을 준용하도록 함
○ 2012년 NRC 보고서에서는 PSM은 학제간 사용자 중점 프로그램을 위한 국가적 관심사로서 직업기회와 국가적 이익 모두가 연관되기 때문에 프로그램 확장에 중점을 두어야 한다고 주장
○ 2017년 현재: 총 355개의 프로그램, 수학/통계/컴퓨터 관련 PSM 프로그램: 63개. 국내 1개의 프로그램이 울산과기대에서 운영되고 있음.

3) 수리과학 분야에서의 PSM 프로그램의 특징

○ 프로젝트와 인턴십을 통한 체험학습
○ "Science Plus" 과정은 팀워크, 의사소통기술의 개발, 프로젝트관리, 기업가 정신을 강조

○ PSM 프로그램은 과학과 수학분야의 대학원생 프로그램에서 벗어나 대학과 학과의 문화적 변화의 촉매 역할 기대

4) 미래수학 전문인력 양성을 위한 교육혁신의 필요성

○ 직장생활에서 성공하기 위한 스킬을 훈련시키는 석사학위 재설계 필요성
○ 강력한 분석능력과 모델링 기술, 과학적 기술을 가진 전문가 수요
○ STEM 분야 박사교육의 전형적인 견습 모델은 현재와 미래보다 변화가 느리고 좀 더 과거 지향적
○ 전문 석사 학위는 취업과의 연계가 확실하고 고임금의 직업을 확보하는 좋은 기회를 제공
○ 산업현장에서 수학자의 가치: 생각의 습관, 엄격한 사고, 신중한 추론에 대한 자신

5) PSM 교육과정사례들

○ 미시간 주립대 - 산업수학 PSM 프로그램
□ 프로그램 커리큘럼
- 산업에서 가장 자주 직면하게 되는 수학을 다루는 가을학기 개설(survey course)
- 학생들이 현지 업체의 제안된 문제들을 다루는 봄 학기 프로젝트 강의 - 대학원생 수준 수학강의 4개
- 통계학 강의 2개
- 엔지니어링, 컴퓨터과학, 경제학, 마케팅 등 선택 가능한 타 전공 연관 강의 4개 - 프로젝트 관리인증
- 포트폴리오 자격시험
□ 산업과의 연계 및 지원
- 산업자문위원회, 산업프로젝트와 후원
○ 우스터 공과대학 - 금융수학, 산업수학 PSM 프로그램
□ 금융수학 PSM
- 핵심 수학과목에서 6학점 이수
- 다섯 개의 금융수학과목 중 4개 이상 이수해야 한다.

- 전공에 따라 수리과학 이외의 과목 6학점을 이수, 경영대학원이나 컴퓨터 공학과 중 택일
- 담당교수의 지도하야 3학점짜리 프로젝트를 완성
- 전문석사 세미나 참석(글쓰기, 발표, 그룹 커뮤니케이션, 이력서 작성 등)

□ 산업수학 PSM

- 핵심 수학과목 이수
- 분야 별 심화 과정(동역학 및 제어, 재료, 유체동역학, 생체공학, 기계학습, 암호학)
- 담당교수의 지도 아래 3학점짜리 프로젝트를 완성
- 전문석사 세미나 참석(글쓰기, 발표, 그룹 커뮤니케이션, 이력서 작성 등)

○ 럿거스대 - 비즈니스 과학석사(MBS): PSM 학위

- MBS: 석사수준의 STEM 과목과 더불어 비즈니스와 정책분야에서 추가과목을 배울 수 있는 학위
- 새로운 유형의 리더와 과학자/공학자가 갖는 간극을 채워 줄 수 있는 인재 양성
- 24개의 응용과학분야 과목을 진행 중 수학 및 통계학 과목인 산업수학과 통계학 및 의학 통계학 등이 있음

6) 국내에서의 수학 전문이학석사(PSM)의 도입 가능성

○ 산학협력을 기반으로 한 산업수학 생태계 조성 및 성공스토리 도출

○ 수학에 대한 인식의 전환에 대한 노력이 전제되어야 함

○ 실제 산업계 문제의 해결을 전제로 한 교육과정의 정비

○ 기업에서는 수요에 기반한 맞춤형인재를 발굴 할 수 있다는 점을 부각

○ 우수학생 유치를 위한 정부의 지원가능성 모색(미국은 NSF에서 학생지원을 하고 있음)

7) 산학협력을 위한 프로그램

산업계의 니즈를 적극적으로 반영하여 커리큘럼에 반영하여야 한다. 기본적으로 산업체로의 취업을 목표로 하는 학생들을 위한 프로그램이 되어야 한다. 또한 이러한 교육과정을 이수한 학생들이 기업에서 반드시 필요한 인재로 성장 할 수 있을 때 산학체와의 협력 시스템이 지속될 수 있을 것이다. 인턴십 프로그램이 가장 핵심적인 요소이다. 산업계에서 나오는 실무데이터를 활용한 실습도 좋은 예이다.

8) 국내 대학의 산업수학 커리큘럼 주요 내용 현황

□ 서울대학교

○ 산업수학 관련 신설교과목

- 알고리즘 및 복잡도 이론, 수학적 프로그래밍 , 정보 이론 및 부호론

○ 산업계와의 공동지도 방안 제시

- 산업계에 종사하는 겸임 교수, 타 학과에 있는 겸무 교수의 공동지도를 통한 학생들의 학문적 지평 확대 및 융합

○ 수학 재교육 프로그램

- 삼성종합기술원과 공동으로 딥러닝 공동세미나를 운영
- 삼성소프트웨어 연구소의 수학 재교육 프로그램에 참여교수와 대학원생이 강사와 보조로 참여하여 교육 담당함
- 학생 인턴쉽 파견
- ETRI, 국가보안기술연구소에 2명의 학생을 파견하고 있으며 확대할 예정 (연구는 매주 또는 매달 세미나를 통해 연구내용을 정리하고 발표하는 방식으로 진행)

□ 한국외대

○ 신설교과목

- 산업수학 (Industrial Mathematics) : 학부 4학년을 대상으로 순수수학을 포함한 수학의 전 영역의 활용에 대하여 학습
- 핀테크를 위한 금융자료 분석 (Statistical Analysis of Financial Analysis for FinTech Industry) : 수학과 및 통계학과 대학원생을 대상으로 금융 위험관리, 투자운용 등의 금융 분야의 기초지식 습득
- 핀테크를 위한 통계적 기계 학습 (Statistical Machine Learning for FinTech Industry) : 핀테크 산업현장에서 자료 분석에 사용될 다양한 supervised 및 unsupervised 기계학습 기법들을 익히고, 컴퓨터 프로그램을 통한 기법 활용 학습

○ 금융기관과 연계한 연구 프로젝트 수행

- 사업에 참여하는 대학원생들을 대상으로 2학기 혹은 3학기 이수 후 계절학기 동안 해당기관에 전일제로 머물면서 실제 산업문제 해결을 위한 공동연구를 수행하고 산업현장을 경험토록 함

□ 고려대학교(안암)

○ 금융수학 전공 석박사 커리큘럼 개발

- 세계적인 명성을 가진 해외 대학의 금융공학 석사 프로그램 (Master of Science in Computational Finance Computational Finance, Carnegie Mellon University)을 벤치마킹 하여 기존의 커리큘럼을 보완

□ 부산대학교

○ 학부과정에서부터 수학의 응용에 주안점을 두어 응용수학 교과목을 개설

- 수학적 프로그래밍, 수치선형대수학, 수치해석, 보험수학입문, 금융수학입문, 응용수학입문

○ 산업응용수학전공으로 대학원 학위과정 실시 (2014년)

▷ 금융·보험수학 전공 트랙

- 확률과정론특강, 금융수리모현론, 파생상품론, 재무관리, 투자론 → 확률미분 방정식론, 자산배분의 최적화론, 금융시장론 → 금융보험실무특강, 논문세미나

▷ 해양수산수학전공

- 수산자원학, 생물결정모델론 → 해양수치프로그래밍, 편미분방정식, 생물모델론 → 수리생물학특강, 논문세미나

▷ 제조수학전공

- 행렬계산론, 공학적계산과 MATLAB → 이산기하학특강, Navier-Stokes' 방정 식론 → 수치적 시뮬레이션, 논문세미나

▷ 최적화

- 응용수학, 고급이산수학, 수치적최적화론 → 고등선형계획법, 최적화이론특강, 비선형최적화 모형론, 논문세미나

○ PSM 프로그램

- 산업응용수학 관련 교과목 이수학점 상향 조정

- 산업체 인턴과정 의무화

○ 인턴십 프로그램 (방학중 운영)

- FN자산평가(서울) 3명, 주택금융공사(부산) 2명

□ 충남대학교

○ 산업수학 교육프로그램 운영 : 5개 과정에서 산업체와 공동으로 ICT역량 개발 교육 실시

- 전자정부 프레임워크 기본과정 - 전자정부 프레임워크 응용과정

- 데이터베이스 기본과정
- 데이터베이스 모델링과정
- 웹 프론트엔드(Front-End) 기본과정

○ 산업체와의 협력시스템 구축

- 동계방학 기간 중 지역 산업체와 공동으로 본 사업단 참여 학생들에 대한 인턴 프로그램 운영

□ 고려대학교(세종)

○ 수리과학 기반의 실무중심형 교육과정 개발

- 산업체탐방 및 실무데이터를 활용한 실습

□ 이화여자대학교

○ FGI(표적집단면접조사)를 통한 산학협력

- 인턴십을 통한 산업현장 방문으로 수학활용현황 조사함. 이를 통한 산업수학 문제 발굴

○ 수리계산 전공트랙 신설(2016학년도)

- 이수학점: 21
- 필수이수: 계산의 기초, 유한수학 및 프로그래밍, 수치해석학, 수치미분방정식, 수리모델링

○ 암호 및 보안 전공트랙 신설(2016학년도)

- 이수학점: 21
- 필수이수: 선형대수학I, 유한수학 및 프로그래밍, 정수론, 현대대수학I, 암호론

○ 학부 교과과정 커리큘럼 개편

- 수학과 교과과정에 "수리모델링"을 신설
- 모든 학부생 대상으로 "계산의 기초와 융합적 문제해결"을 신설

□ KAIST

○ 산업수학 융합 교과목 개설

○ 산업체 인턴 프로그램 발굴 및 참여 지원

- CUop(Company-University Cooperation) 프로그램: 학부 3-4학년 학생들 동문 중소/중견기업에 인턴으로 8주 이내로 파견

□ 성균관대학교

○ 산업수학 교육과정 구축

- MDA(행렬해석 기반 데이터 수리해석) 교육과정 구축 완료 : 캡스톤 디자인, 계산 복잡도, 선형계획법, 빅데이터를 위한 기계학습, 데이터 다양체 및 거리 기하학, 수치최적화, 조합적 행렬론, 산업수학 특강

○ 대학원생 4명이 삼성SDS Analytics 사업팀에 파견 - 삼성생명 종합솔루션 시스템 구축과제를 수행

□ 가톨릭대학교

○ 금융수학 PSM 운영 및 실무형 커리큘럼 구성

- 산업체의 니즈에 따라 장단기 직무연수 과정 개설 - 프로그래밍 교육강화로 실무적용 능력 배양

□ 건국대학교

○ 학부 교과과정 개편

- "산업수학과 실습" 개설: 강연 뿐 아니라 학생들의 팀 프로젝트와 현장 방문 수업 등으로 진행

○ 집중과정(intensive course) 프로그램 개발: 산업계에서 파생되는 문제를 중심으 로 수학과 교수 1명과 산학연 전문가 1명이 공동 멘토를 맡아서 교육을 진행

- 기하/대수 기반수학의 산업응용 집중과정 프로그램 - 바이오/의료 수학의 산업응용 집중과정 프로그램

□ 아주대학교

○ Michigan State University에서 운영하고 있는 PSM(전문이학석사학위) 과정을 벤치마킹

- 인턴십, 산업수학 협동연구, 전문 교과목 이수 등을 학제 상으로 반영

□ 제주대학교

○ 학·석사 통합과정 운영 (수학과, 통계학과, 컴퓨터공학과, 사업체 참여)

학부 4학년 : 9학점 개설 (학기당 3 6학점)

석사과정 : 8과목 24학점 개설 (학교규정에 맞게 개설)

* 대학별로 특성화가 필요함. 과목 이름은 구체적으로 협의할 필요가 있음
* 반드시 산업현장과 연계한 체험 및 실습과목 배치(캡스톤 디자인 등)

○ 빅데이터 분석 양성가를 위한 석.박사 통합과정을 운영

○ 산업수학은 수학에 대한 기본적인 지식을 함양하고 4학년과 대학원을 연계하여 운영

제 4 절 새로운 교육과정의 대안(예)

○ 주요 과목의 예(석사과정)

1) 사이언티픽 컴퓨팅 6학점

현대적인 프로그램 언어 (예 : C / C++, Python, R, SageMath)를 사용하거나 MatLab, Python, R, SageMath와 같은 상업용 또는 무료 공학도구를 사용하여 현실 문제와 현장에서 만나는 과학적 문제를 해결하기 위한 수치적 해법 및 방법을 소개한다. 고성능 컴퓨팅 및 scientific visualization 등을 하는 입문과정에 대한 소개가 포함되어 있다.

2) 수치 선형대수학 3학점

선형연립방정식의 해를 직접 및 iterative methods에 의하여 구하는 이론 및 수치적 방법론에 대한 연구를 다룬다. 주제에는 SVD, 최소제곱법 및 고윳값 및 고윳벡터의 수치적 계산방법이 포함된다.

3) 통계 3학점 응용수리통계 및 데이터 분석

4) 응용해석학의 방법론 3학점

응용수학에 적용되는 함수해석학. 단위 및 노름선형공간, 유계 및 콤팩트연산자, 내적공간과 힐버트 공간, self-adjoint 연산자, orthogonal expansions 및 푸리에해석 등의 주제를 포함한다.

5) 최적화 이론 3학점

선형최적화이론, unconstrained 및 constrained 최적화이론

6) 이산수학 3학점

그래프, 조합 최적화, 정수 프로그래밍, 이산 알고리즘

7) 응용 분야 강좌 9학점

학생이 분야의 핵심 개념에 익숙해지고 현장의 실무자가 직면한 문제 해결에 기여할 수 있는 전공 분야 중 한 두 개의 분야에서 3가지 강좌를 선택하여 수강하는

과정이다. 적합한 분야의 예로는 생물정보학, 금융수학, 보건통계, 보험계리, 암호, 공학, 빅데이터, Deep Learning, 환경과학, 유전학 및 경영과학이 있다. 3강좌를 수간하는 대신 2강좌 수강과 취업하고자 하는 관련기업에서의 3개월 인턴쉽을 3학점 한 강좌로 인정하여 3강좌를 마치는 과정으로 구성할 수 있다.

8) 인턴십

프로젝트 경험을 할 수 있는 기업, 정부 또는 산업 현장에서의 인턴십. 이 프로젝트는 현장 멘토와 학생 및 교수진의 협조가 필요하다. 내용, 범위 및 목적은 미리 절차가 있어야 한다.

9) 의사소통 능력

복잡한 문제를 해결하기 위한 일반적인 방법으로 팀원 또는 다른 팀과 협력 할 때 의사소통의 기술은 필수적이다. 따라서 보고서 작성과 프레젠테이션은 응용수학 분야의 모든 석사 과정에서 중요한 부분이다. 실무 경험은 이러한 기술을 배우고 테스트하는 훌륭한 방법이다.

제6장 교과서 개발 분야 (산업수학 교과서)

제 1 절 미래 수학교육이 추구하는 목표

1. 학교 수학교육: 창의적 사고력을 갖춘 사람 만들기 (사고체계의 확립)
   - 창의력의 발현은 전문성이 어느 정도 뒷받침이 되어주어야 가능
   - 학생 스스로의 경험에 의한 사고력 증진
   - 수학교육에 의한 논리적, 합리적 사고력 습득
   - 수학학습 내용 요소: 스스로 학습 가능한 내용을 강조 (이산수학, 기하를 중심으로 대학 수학교육을 위한 사전 교육)
2. 대학 수학교육: 전문성을 갖춘 인재 양성 (이해, 분석, 종합 능력, 새로운 것의 창조)
   - 전문 수학교육에 의한 전문 인재로 성장: 4차 산업혁명은 결국 수학
   - 미래 산업에 필요한 수학 내용에 대한 경험: STEM 교육
   - 산업수학 등의 사회 및 산업의 변화를 전제한 전문성 습득
   - 미래직업군의 고려
   - 수학학습 내용 요소: 계산 능력, 현상 이해 강조 (미분적분학, 대수, 확률과 통계)

제 2 절 수학학습 내용 추출의 배경

새로운 교육과정을 모색하게 되는 이유는 기존의 교육과정에 대한 반성에서 비롯된다. 현재의 교육과정은 사실상 그 철학이 3차 교육과정의 그것과 다름이 없는데 이 과정이 시작된 것은 벌써 40여 년 전으로서 현재의 시대적 흐름과 요구를 반영하기에는 이제는 한계가 있다는 의견이 많다. 3차 교육과정이 참고하고 보조를 맞춘 New Math 라는 것은 상위 20% 학생의 성취기준을 기준으로 한 것이었다는 점도 현대의 시대적 흐름과 요구에 잘 부합한다고 할 수 없을 것이다. 이에 더불어 다음 두 가지와 같은 점도 새로운 교육과정을 모색하게 하였다.

문과, 이과로의 분류: 문과, 이과에 의한 분류는 수학적 지식이 많이 요구되는 상경계로 진학하는 학생들의 요구를 충족시키지 못하며 수학적 기법이 많이 요구되지

않는 분야에 종사하게 될 사람들의 요구에도 적절하지 않다. 예를 들어서 공통과정 이후의 문과 수학의 내용요소 중에는 수열, 급수, 지수함수, 로그함수 등이 포함되어 있는데, 이 내용요소들이 특정 인문계 학과에 진학할 학생들에게는 크게 중요하지 않다.

실용수학: 실용수학이라 하는 것은 수학을 전문적으로 사용하지 않는 일반 교양인을 대상으로 하는 수학 내용인데 내용요소만이 강조되어 있을 뿐, 즉 '무엇'이 쓰이는가에만 관점을 맞추어져 있을 뿐, '어떻게' 사용되는가에 대한 고려가 되어 있지 못하다.

그러므로 새로운 교육과정을 모색할 때에 앞에서 언급한 점이 고려되어야 바람직할 것이다. 즉, 분류의 문제와 내용요소를 마련할 때의 '기준'의 문제이다.

지난 100년 사이에 수학은 크게 두 가지 트랙으로 나뉘어 교육되었다. 서양에서는 전문적 수학을 사용할 사람들을 보통 과학자(scientist)라고 부르며 이에는 자연과학, 공학, 일부 사회과학과 일부 인문과학을 공부하는 사람들이 여기에 속하게 된다. 이 밖에 일반적으로 깊이있는 수학을 사용하지는 않지만 수학적 의사소통은 할 수 있어야 하는 사람들이 있다. 그 동안 대학에서는 이 두 집단에게 수학을 가르쳐 왔다. 우리나라에서도 이와 유사한 두 가지 트랙이 존재하며 간단히 이과와 문과 수학으로 나누고 있지만 실제로는 문과에 분류되는 여러 학문을 전공하는 학자들도 과학자이며 수준 높은 수학을 필요로 하는 경우가 많다. 예를 들면 사회학 계열 일부, 심지어는 언어학자들도 일부 여기에 포함된다. 그러므로 문, 이과로의 분류가 아니라 예를 들면, 전문적 수학지식을 사용하게 될 집단과, 전문적이지는 않은 상식적 수학 지식을 사용하게 될 집단으로의 분류와 같은 것이 가능하다고 생각된다.

우리는 대학에서 대부분 서양 교과서를 그대로 도입하여 교육하며 위의 과학자 트랙의 대표적인 교과서는 미적분을 기반으로 한 교과서들로서 여기에 행렬과 미분방정식 정도를 더 가르친다. 그리고 전공의 필요에 따라서 이보다 높은 과정으로 연계되게 되어 있다. 한편 과학자 이외의 학자들로 수학이 필요한 사람들에게 가르치는 기초적이면서도 이산적인(discrete) 내용을 모은 교과서는 대표적으로 Finite Mathematics라는 이름으로 논리, 세는 방법(counting), 확률 및 통계, 벡터와 행렬계산, 선형계획법, 게임이론 등을 가르쳤다. 이 교과서의 특징은 연속적인 미적분 이론 외의 대부분의 기초수학을 포함하고 있다는 것이다.

약 60년 정도 이런 교과서 사용이 보편화된 가운데 20세기 말경에 수학 학습에 친밀감을 주면서 학습의 동기를 부여하는 방법으로 이 내용들이 실제로 활용되는

문제를 중심으로 내용을 재편하고 지난 20세기 후반에 새로이 등장한 이론을 첨가한 일련의 교과서가 나타났다. 이 중의 하나를 만든 단체는 COMAP(Consortium for Mathematics and Its Applications)라는 비영리단체로서 수학을 사용하는 사람들과 가르치는 사람들이 주축이 되어 개발하였다. 여기 참여한 세계적 수학자는 뉴욕주립대학의 Tucker 교수를 들 수 있다. 이 모임에서 개발된 미적분을 제외한 대학 수학 교과서로 과거의 Finite Mathemataics를 대체하는 것이 For All Practical Purposes 라는 교과서로 현재 10판(10th Edition)을 출간하고 있다. 같은 단체에서 출간한 흥미로운 교과서에는 중등수학을 위한 모델링 교과서 시리즈가 있다.

이 단체의 교과서들은 시험적 교과서이지만 메릴랜드 주립대학 교양 수학 과목의 교과서로 사용되는 등 매우 널리 알려져 있다고 생각되며 미적분 외 트랙의 대표적 형태로 자리잡아가고 있다고 평가된다. 특히, For All Practical Purposes(COMAP, 2016)는 미래를 위한 교과서를 지향하는 재미있는 특징을 여럿 가지고 있다. 따라서 본 연구에서는 이 책의 내용 리스트를 참고함과 동시에 이 책이 내용을 전달하는 여러 방법에서도 우리가 배울 것이 많다고 판단하려 몇 가지 서술하고자 한다. 우선 앞에 설명한 대로 이 책의 구성은 수학 이론 중심이 아니라 이의 활용이 중심이 되고 있다. 따라서 다양한 문제를 중심으로 한, 두 가지 수학적 도구를 도입해 나간다. 이러한 특징은 무엇보다도 모델링을 중심으로 한 수업에 특화되어 있으며 우리에게 시사하는 점이 크다.

한편 이 책에는 다양한 문제 외에 수학을 설명하는 방법으로 수식은 꼭 필요한 데서만 사용되고 대부분의 설명을 도표와 다이어그램, 그래프 등 다양한 시각적 도구에 의존해서 설명하고 있다. 이것이 직관적 이해를 이끌어내는 핵심이라고 판단하고 있는 것이다. 따라서 공식에 의존하기보다는 문제를 풀면서 방법을 이해하고 이것을 시각화와 연계지어 깊은 이해로 이끌어 간다고 보인다. 이와 함께 여러 문제의 배경이 되는 역사, 또는 재미있는 문제의 활용 등을 곁들여 읽기 좋은 교과서를 만들려고 노력하였다. 특히 현실과 연계된 문제들은 우리가 매일매일 보는 주변의 물건에서 수학적인 내용을 뽑아내고 설명하기 때문에 거부감이 적어질 것을 추측할 수 있다. 우리 교과서가 지향해야 할 모델의 하나라고 생각된다. 모든 수학교과서가 이렇게 되면 학생들의 수학 학습 자체가 힘들어질 수 있지만 일부 교과서에서 이런 형태로 수학 학습을 제시하면 수학을 공부하는 데 자극이 되어 작용할 것이 틀림없다.

1) 일반적 수학 지식 사용자를 위한 학습내용 분류 예시

다음에는 전문적이지 않은 상식적 수학 지식을 사용하게 될 집단에게 필요한 과정을 예시하고자 한다. 이 예시는 앞에서 언급한 For All Practical Purposes 라는 미국의 교과서의 내용을 요약한 것인데 이 교과서를 살펴보게 된 까닭은, 위에서 설명한 사항들을 제외하고도 앞에서 제시했던 현재의 교육과정이 지니고 있는 2가지의 문제를 모두 해결하려 시도하고 있다고 생각되기 때문이다. 위에서 언급했듯이 이 교과서에 실려 있는 내용요소는 과거의 이른바 Finite Mathematics 라고 불리었던 분야의 내용과 크게 다른 점이 없다. 그러나 다시 한 번 주목해야 할 사실은, 과거 Finite Mathematics 시절에는 무엇을 가르칠 것인가에 주안점이 주어진 반면에 COMAP 에서는 '수학이 실생활에 어떻게 사용되는가'를 기준으로 하여서 분류를 하고, 각각의 분류에 적합한 수학적 내용요소를 마련하려 하였다는 것이다. 그 수준은 대학교 신입생 정도에게 적합한 것들이지만, 중등교육을 위한 새로운 교과과정을 모색할 때에는 이들 중에서 수준에 맞는 것들을 취합할 수 있을 것이며, 초등학생들에게는 이러한 모든 문제 해결의 기본이 되는 헤아리기 또는 세기(counting)의 경험을 많이 쌓아주고 이를 시각적으로 다룰 수 있도록 하는 것이 필수적이다. 미래세대를 위한 수학 학습내용은 기존의 교육과정의 학습내용에 다음 내용을 감안하여 추가할 내용들이 될 것이고 이의 교육은 선택적 교육이 될 수밖에 없다.

이 책에서 다루는 수학 학습요소들은 우리나라를 기준으로 하면 미적분과 고급 기하학을 제외한 고등학교 수학을 잘 알고 있으면 그 사고과정을 이해할 수 있는 수준이다. 그러나 현재 우리나라 교육과정과 같이 각각을 공식화된 방법으로 접근하면 대단히 많은 내용이 들어있다고도 할 수 있다. 이런 관점에서 접근하면 이 교과서는 매우 가르치기 힘들고 산만하며 외워야 할 내용이 너무 많은 것처럼 여겨지게 된다. 반대로 이것을 실생활에서 나타나는 여러 문제를 기초적 사고법에 의해서 해결하는 여러 가지 접근방법을 소개하는 것이라고 보면, 기초적 사고법을 잘 활용할 수 있게 단련하는 것일 뿐이라는 점에서 많지 않은 내용이라고도 할 수 있다.

가. 활용 면에서 분류한 현실문제

COMAP의 교과서는 활용면에서 초보적인 수학을 효율적으로 활용하고 있다. 이를 보면 '수학이 실생활에 어떻게 사용되는가'에 따라서 비교적 단순한 현실적 수학 문제를 다음과 같이 분류하고 있다.

1. 경영에 수반되는 문제 (Management Science)
2. 자료의 분석과 이용 (Statistics: The Science of Data)
3. 투표와 사회적 선택 (Voting and Social Choice)
4. 공정성 문제 (Fairness and Game Theory)
5. 디지털 혁명 (Digital Revolution)
6. 크기와 증가에 대한 문제 (On Size and Growth)
7. 금융과 자원 문제 (Your Money and Resources)

이런 분류는 수학이 응용되는 분야에 따른 분류라고 할 수도 있지만 동시에 프로젝트 기반 수업 또는 모델링 수업에 효율적이라고 할 수도 있다.

이 교과서의 또 다른 특징은 위와 같은 제목에 필요한 수학적인 내용을 소개하되, 수학적인 내용에 대한 증명을 강조하지 않고 그 쓰임새를 강조하며 실제적인 예를 이용하여 그 문제를 풀어 나가는 과정을 이용하여 수학적 내용을 설명한다는 것이다.

제 3 절 수학을 사용하는 방법

잘 알려져 있는 단체인 COMAP(Consortium for Mathematics and Its Applications)가 만든 교과서인 “For All Practical Purposes”를 주로 참고하여 현재 일반 교양으로서 필요하다고 생각되는 대학 1학년 정도까지 수준의 수학이 활용되는 내용을 큰 틀에서 나열하였다.[1] 여기서 현재 수학의 학습목표의 한 가지 관점을 볼 수 있다.

이 내용은 물리학과 공학, 대표적으로 미분방정식의 활용을 준비하는 내용을 학교수학의 학습목표로 삼고 있는 현재의 학습내용과 함께 추가해서 학습하여야 할 내용이 될 것이다.

경영 Management Science

1. 도시 공학 Urban Services
    - 오일러 회로 Euler Circuits
    - 오일러 회로 찾기 Finding Euler Circuits
        - 문제 해결의 인간적 측면 The Human Aspect of Problem Solving
    - 오일러 회로를 넘어서 Beyond Euler Circuits
    - 도시 그래프 순회 문제 Urban Graph Traversal Problems

[1]이 책의 내용은 다음 홈페이지를 참조할 것: **http://www.macmillanhighered.com/Catalog/product/forallpracticalpurposes-tenthedition-comap**

- 이스라엘 전기회사 검침 작업 감소
  Israel Electric Company Reduces Meter-Reading Task

2. 비즈니스 효율성 Business Efficiency
   - 해밀턴 회로 Hamiltonian Circuits
   - 외판원 순회 문제 Traveling Salesman Problem
   - 순회 외판원 돕기 Helping Traveling Salesmen
     - NP-완전성 문제들 NP-Complete Problems
   - 최소 비용 생성나무 Minimum-Cost Spanning Trees:
     - 장거리 전화가 원활하게 작동하는 방법을 AT&T 관리자가 설명합니다.
       AT&T Manager Explains How Long-Distance Calls Run Smoothly.
     - 공통 조상? Common Ancestors?
   - 중요 경로 분석 Critical-Path Analysis
     - 모든 순간은 적절한 항공 스케줄에 포함됩니다.
       Every Moment Counts in Rigorous Airline Scheduling.
3. 계획 및 스케줄 짜기 Planning and Scheduling
   - 스케줄 문제 Scheduling Tasks
   - 중요 경로 스케줄 Critical-Path Schedules
     - 경영 과학 및 재해 복구 Management Science and Disaster Recovery
   - 독립적인 작업 Independent Tasks
   - 상자에 나누어 담기 Bin Packing: 수학 도구 사용 Using Mathematical Tools
   - 채색을 통한 분쟁 해결 Resolving Conflict via Coloring
     - 4색 문제 Four Color Problem
     - 면접 일정 잡기 Scheduling Job Interviews
4. 선형 계획법 Linear Programming
   - 선형 계획법 및 혼합 문제: 리소스를 결합하여 이익 극대화
     Linear Programming and Mixture Problems: Combining Resources to Maximize Profit
   - 선형 계획법의 사례 연구 Case Studies in Linear Programming
     - 선형 방정식과 절편 Linear Equations and Intercepts
     - 선형부등식 Linear Inequalities
   - 최적의 생산 정책 찾기 Finding the Optimal Production Policy

- 선형 프로그래밍: 생명은 복잡합니다.
  Linear Programming: Life Is Complicated.
  - 선형 프로그래밍의 아버지는 그 기원을 떠올리게한다.
    The Father of Linear Programming Recalls Its Origins
  - 빠른 알고리즘을 찾는 것이 더 나은 항공 서비스를 의미합니다.
    Finding Fast Algorithms Means Better Airline Service

통계: 데이터 과학 Statistics: The Science of Data

1. 데이터 탐색: 분포 Exploring Data: Distributions
   - 분포 표시: 히스토그램 Displaying Distributions: Histograms
   - 히스토그램 해석 Interpreting Histograms
   - 분포 표시: Stemplots Displaying Distributions: Stemplots
   - 중심 설명하기: 평균과 중앙값 Describing Center: Mean and Median
     - 수식 사용 Using Formulas
     - 어떤 평균을 의미합니까? Which Mean Do You Mean?
   - 변동성 설명: 범위 및 사 분위수 Describing Variability: Range and Quartiles
   - 다섯 자리 요약 및 상자 그림 The Five-Number Summary and Boxplots
   - 변동성 설명: 표준 편차 Describing Variability: The Standard Deviation
     - 제곱과 제곱근 Squares and Square Roots
     - 표준 편차 계산 Calculating Standard Deviation
   - 정규 분포 Normal Distributions: 밀도 추정 Density Estimation
   - 정규 분포에 대한 68-95-99.7 규칙 The 68-95-99.7 Rule for Normal Distributions
2. 데이터 탐색: 관계
   - 관계 표시: 산포도 Displaying Relationships: Scatterplot
   - 예측하기: 회귀선 Making Predictions: Regression Line
     - 기울기-절편 형식으로 직선의 그래프 그리기
       Graphing a Line in Slope-Intercept Form
   - 상관 관계 Correlation
     - 상관 관계 계산하기 Correlation Calculation

  - 평균에 대한 회귀 Regression Toward the Mean
- 최소 제곱 회귀 Least-Squares Regression
  - 회귀 및 상관 관계: 대학 성공 Regression and Correlation in Action: College Success
- 상호 관계 및 회귀 분석 Interpreting Correlation and Regression

3. 데이터와 의사결정 Data for Decisions
- 샘플링 Sampling
- 잘못된 샘플링 방법 Bad Sampling Methods
- 단순 무작위 샘플 Simple Random Samples
- 샘플 설문 조사에 관한 주의 사항 Cautions About Sample Surveys
- 실험 Experiments
  - 실험 윤리 Ethics in Experiments
- 실험 대 관측 연구 Experiments versus Observational Studies
- 추론: 표본에서 모집단으로 Inference: From Sample to Population
- 신뢰 구간 Confidence Intervals
  - 설문 조사의 진실 Truth in Polling

4. 확률: 우연의 수학 Probability: The Mathematics of Chance
- 무작위 현상과 확률 Random phenomena and probability
- 확률 모델과 규칙 Probability Models and Rules
  - 확률과 심리학 Probability and Psychology
- 확률: 독립 및 종속 사건 Rules of Probability: Independent and Dependent events
- 이산 확률 모델 Discrete Probability Models
- 동등한 결과 Equally Likely Outcomes
  - 기술을 사용한 계승 및 순열과 조합의 계산
    Using Technology to compute permutations, factorials, and combinations
  - 생일 일치 문제 Birthday Coincidences
- 연속 확률 모델 Continuous Probability Models
- 확률 모델의 평균 및 표준 편차 The Mean and Standard Deviation of a Probability Model
- 중심 극한 정리 The Central Limit Theorem

투표와 사회적 선택 문제 Voting and Social Choice

1. 사회적 선택 문제: 불가능한 꿈 Social Choice: The Impossible Dream
    - 사회적 선택 문제 소개 An Introduction to Social Choice
    - 대다수 규칙과 Condorcet의 방법 Majority Rule and Condorcet's Method
        - 역사적인 기록 The Historical Record
    - 후보자가 3명 이상일 때의 서로 다른 투표 시스템
      Other Voting Systems for Three or More Candidates
    - 극복하기 어려운 문제: Arrow의 불가능 정리 Insurmountable Difficulties: Arrow's Impossibility Theorem
    - 더 나은 접근법? 승인 투표 A Better Approach? Approval Voting
2. 투표 시스템의 조작 가능성 The Manipulability of Voting Systems
    - 조작 가능성 소개 An Introduction to Manipulability
    - 대다수 규칙과 Condorcet의 방법 Majority Rule and Condorcet's Method
    - 후보자가 3명 이상일 때 투표 시스템의 조작 가능성
      The Manipulability of Other Voting Systems for Three or More Candidates
    - 불가능성 Impossibility
    - 의장의 역설 The Chair's Paradox
3. 가중 투표 시스템 Weighted Voting Systems
    - 가중 투표 방법 How Weighted Voting Works
        - 선거인단 The Electoral College
    - Shapley-Shubik 모델 Shapley-Shubik model
        - 영향력 지수 Power Indices
    - Banzhaf의 영향력 지수 The Banzhaf Power Index
        - 수학적 늪 A Mathematical Quagmire
        - 이진수 계산 Counting in Binary
        - 선거인단: 2012년, 2016년, 2020년 대통령 선거
          The Electoral College: The Presidential Elections of 2012, 2016, and 2020
    - 투표 시스템 비교 Comparing Voting Systems
4. 대통령 선출 Electing the President
    - 2 후보 선거를 위한 공간 모델 Spatial Models for Two-Candidate Elections

  - 합계 표기법 Summation Notation
- 다수의 후보자가 있는 선거를 위한 공간 모델 Spatial Models for Multi-candidate Elections
- 필드 좁히기 Narrowing the Field
- 어떤 후보가 탈락하게 됩니까? What Drives Candidates Out?
- 선거 개혁: 승인 투표 Election Reform: Approval Voting
- 선거인단 The Electoral College
- 대통령을 선출하는 더 좋은 방법이 있습니까? Is There a Better Way to Elect a President?

공정성와 게임 이론 Fairness and Game Theory

1. 공정 분배 Fair Division
   - 조정된 수상자 절차 The Adjusted Winner Procedure
     - 일차방정식들 풀기 Solving Linear Equations
   - Knaster 상속 절차 The Knaster Inheritance Procedure
   - 공정한 분배와 장기 이식 정책 Fair Division and Organ Transplant Policies
   - 순서대로 하기 Taking Turns
   - 나누기와 선택 Divide-and-Choose
   - 케이크 나누기 절차: 비례 Cake-Division Procedures: Proportionality
     - 케이크 절단의 60년 Sixty Years of Cake Cutting
   - 케이크 나누기 절차: 부러움의 문제 Cake-Division Procedures: The Problem of Envy
   - Vickrey 경매 Vickrey Auctions
2. 배분 Apportionment
   - 배분 문제 The Apportionment Problem
     - 비율을 백분율로 Fractions to Percentages
   - 해밀턴 방법 The Hamilton Method
   - 나누기 방법 Divisor Methods
   - 어떤 나누기 방법이 가장 좋은가? Which Divisor Method Is Best?
     - 수학과 정치: 이상한 혼합물 Mathematics and Politics: A Strange Mixture
3. 게임이론: 경쟁에 대한 수학 문제 Game Theory: The Mathematics of Competition

- 2인 갈등 게임: 순수 전략 Two-Person Total-Conflict Games: Pure Strategies
- 2인 갈등 게임: 혼합 전략 Two-Person Total-Conflict Games: Mixed Strategies
- 부분 갈등 게임 Partial-Conflict Games
- 대형 게임 Larger Games
  - 노벨 경제상 The Nobel Prize in Economics

디지털 혁명 The Digital Revolution

1. 개인 확인 번호 Identification Numbers
   - 확인용 숫자 Check Digits
     - VIN 시스템 The VIN System
   - ZIP 코드 The ZIP Code
   - 바코드 Bar Codes
     - 뉴 프론티어: 바 코딩 DNA New Frontier: Bar Coding DNA
     - 바코드의 역사 History of the Bar Code
   - 개인 데이터 인코딩 Encoding Personal Data
     - 주민등록번호 Social Security Numbers
     - 국가 기록 보관소의 인구 조사 기록 Census Records at the National Archives
2. 정보의 과학 Information Science
   - 이진 코드 Binary Codes
     - 유비쿼터스 리드-솔로몬 코드 The Ubiquitous Reed-Solomon Codes
     - 베라 플레스 Vera Pless
   - 패리티 검사 합계로 인코딩 Encoding with Parity-Check Sums
     - Neil Sloane
   - 데이터 압축 Data Compression
     - 모스 부호 Morse Code
     - David Huffman
   - 암호 Cryptography
     - 유전자 코드 모델링 Modeling the Genetic Code
     - 소수와 합성수 Prime and Composite Numbers
   - 웹 검색 및 수학 논리 Web Searches and Mathematical Logic
     - 케빈 베이컨의 6단계 Six Degrees of Kevin Bacon

크기와 증가 문제 On Size and Growth

1. 증가와 형태 Growth and Form
    - 기하학적 유사성 Geometric Similarity
    - 그게 얼마나 ...? How Much Is That in...?
    - 산 스케일링 Scaling a Mountain
        - 마일 높이 빌딩? A Mile-High Building?
    - 죄송합니다. 킹콩은 없습니다. Sorry, No King Kongs
        - 중요한 자릿수 Significant Digits
        - 거대한 존재에 어떤 이점이 있습니까? Is There Any Advantage to Being Gigantic?
    - 차수 텐션 Dimension Tension
        - 자연 지수 및 소수 지수 Natural and Fractional Exponents
        - 맞춤 크기 조정 Scaled to Fit
    - 성장하는 법 How to Grow
        - 실종 아동 찾기에 도움 Helping to Find Missing Children
        - 10진 로그 Base-10 Logarithms
2. 대칭성과 패턴 Symmetry and Patterns
    - 피보나치 수와 황금비 Fibonacci Numbers and the Golden Ratio
        - 피사의 레오나르도 (피보나치) Leonardo of Pisa (“Fibonacci”)
        - 수열 Sequences
        - 그리스인이 황금 사각형을 만드는 방법 How the Greeks Constructed a Golden Rectangle
        - 소비자 물가 지수: 기하 평균의 응용 The Consumer Price Index: An Application of the Geometric Mean
        - 우리는 ” 그리스의 영광” 을 되찾기 위해 노력하고 있습니까? Are We Trying to Reclaim the “Glory That Was Greece”?
    - 로제트, 스트립 및 벽지 패턴 Rosette, Strip, and Wallpaper Patterns
        - ” 완벽하기 위해 노력하시오” “Strive Then to Be Perfect”
        - 바쿠바 사람들이 만든 패턴 Patterns Created by the Bakuba People
        - 17가지 월페이퍼 패턴 The 17 Wallpaper Patterns
    - 패턴 표기법 Notation for Patterns

- 대칭 그룹 Symmetry Groups
- 프랙탈 패턴과 카오스 Fractal Patterns and Chaos
  - 프랙탈의 아버지 The Father of Fractals

3. 타일링 Tilings
   - 정다각형 타일링 Tilings with Regular Polygons
     - 정다면체와 버키 볼 Regular Polyhedra and Buckyballs
   - 불규칙한 다각형으로 타일링 Tilings with Irregular Polygons
   - 평행이동만 사용 Using Only Translations
     - 아마추어에게 갈채를 In Praise of Amateurs
   - 평행이동과 반회전만 사용 Using Translations Plus Half-Turns
   - 비 주기적 타일링 Nonperiodic Tilings
     - Sir Roger Penrose
     - 준결정 Quasicrystals

금융과 자산 문제

1. 저축 모델 Savings Models
   - 산술적 증가와 단리 Arithmetic Growth and Simple Interest
   - 기하적 증가와 복리 Geometric Growth and Compound Interest
     - 정수 지수와 지수 관계 Integer Exponents and Exponential Relations
     - Thomas Robert Malthus
   - 한계를 가중시키는 것 A Limit to Compounding
     - 수 e The Number e
   - 저축 모델 A Model for Saving
     - 산술 및 기하 수열의 합 Sums of Arithmetic and Geometric Sequences
   - 현재 가치 및 인플레이션 Present Value and Inflation
     - 파생상품이란? What Is a Derivative?
     - 재무 계산을위한 스프레드 시트 사용 Using a Spreadsheet for Financial Calculations
2. 대출 모델 Borrowing Models
   - 단리 Simple Interest
   - 복리 Compound Interest
     - 실제 환율은 얼마인가? What's the Real Rate?

- 일반 융자 Conventional Loans
  - 우리가 우리 집에서 한 일과 그 밖에 할 수있는 일 What We Did with Our House, and What Else You Could Do
  - 담보 대출 공황 The Mortgage Crisis
- 연금 Annuities
  - 보험 증권이란 무엇입니까? What Is an Actuary?

3. 자원의 경제 Economics of Resources

- 생물학적 개체군을 위한 성장 모델 Growth Models for Biological Populations
  - 2050년까지 120억개 또는 90억개 정도? 12 Billion by 2050 - or Only 9 Billion
- 재생 불가능한 자원은 얼마나 오래 지속될 수 있습니까? How Long Can a Nonrenewable Resource Last?
  - 자연 로그 사용하기 Using Natural Logarithms
- 방사능 붕괴 Radioactive Decay
- 유지할 수있는 재생 자원 Sustaining Renewable Resources
  - 함수 표기법 Function Notation
- 자원 수확의 경제성 The Economics of Harvesting Resources
  - 이스터 섬의 비극 The Tragedy of Easter Island
- 동역학계와 혼돈 Dynamical Systems and Chaos

가. 현실문제를 따른 구체적 수학 내용

다음에 설명하고 예로 드는 현실적 문제는 종류가 매우 많다. 또 이런 문제에 나타나는 수학 내용요소들도 매우 많다. 학생들은 이런 문제를 모두 기억하고 잘 풀도록 훈련하는 것이 아니라 이런 문제를 처음 만났을 때 초보적인 수학을 도구로 문제를 다뤄 나가는 방법을 찾는 훈련을 하는 것이므로 문제의 종류가 많은 것은 어려운 점이 아니다. 또 많은 내용요소도 이를 모두 숙달하자는 것이 아니라 이런 내용요소가 있음을 알게 되었을 때 이를 쉽게 파악하고 효율적으로 활용할 수 있는 능력을 키우자는 것이므로 이 또한 문제가 되지 않는다. 즉, 이 과정을 통해서 수학적 사고법을 훈련하는 것이지 결코 여기서 가장 효율적인 풀이법들을 기억해 나가는 것이 아니라는 점을 간과하면 안 된다.

1. 경영과 관련된 문제

우선 경영에 수반되는 문제에는 도시공학 문제, 비즈니스 효율성 문제, 기획과 절차 문제, 선형계획법과 운송문제 등이 있다. 이런 문제들은 초보적인 그래프 이론과 알고리즘 아이디어를 도입하면 초보적인 조합수학을 활용해서 이해하고 해결해 나갈 수 있다. 이와 함께 연립일차방정식, 연립일차부등식(선형계획법)을 써서 계산한다. 여기서 활용하는 도구로는 그래프, 수형도, 오일러회로, 해밀턴회로, 공정의 계획, 색깔로 구별하기, 부등식의 영역(선형계획법, LP) 등이 있다.

2. 데이터 과학, 통계

자료를 분석하고 이용하는 방법으로는 자료의 분포를 탐구 표현하기(3차원 이상 데이터 포함), 자료의 상관관계를 탐색하기, 결정(decision)을 위한 자료의 분석, 가능성을 수치화하기(확률) 등이 있다. 이 내용은 우리 고교과정의 확률과 통계 단원의 내용에 해당하는 것이다. 여기서 활용하는 도구로는 히스토그램·상자그림·분산그림·수형도 등의 시각화 도구, 평균·표준편차 등의 통계적 개념, 정규분포 등의 분포 개념, 상관관계와 최적함수 등의 최소값 문제, 합·곱의 법칙 및 순열·조합 등 세는 방법, 기초적 확률, 큰 수의 법칙, 중심극한정리 등이다. 이 내용을 이해하기에는 고등학교에서 어려운 편이므로 기초를 잘 다지는 것이 매우 중요하다.

3. 사회적 선택 문제: 투표

사회적 문제는 대부분 선택의 문제로 예를 들어 다양한 투표방법 문제가 있다. 대통령 선거나 어떤 스포츠에서 여러 팀이 경기하여 복잡한 경기 결과를 놓고 누가 가장 잘 했는가를 판단하는 문제 등이 있다. 한편 복잡한 사회 문제를 제기하고 여기서 큰 결정을 내리는 문제는 수학적으로 매우 커다란 문제로 프로젝트 문제로 다뤄야 한다. 여기서는 사회적인 문제에 어떻게 수학을 적용할 수 있는가를 탐구할 수 있다. 여기서 사용할 수 있는 도구는 많이 있으며 각각의 이론을 섭렵할 수는 없다. 여러 서로 다른 상황에 따라 각각의 투표방법은 장점과 단점을 모두 가지고 있으며 어떤 경우에 어떤 문제가 생기는지를 스스로 파악할 수 있도록 하는 것이 중요하다.

4. 공정성 문제: 게임 이론

공정하게 나누는 방법을 찾는 문제나 공정하게 할당하는 문제는 여러 사람 사이의 경쟁으로 파악할 수 있다. 이로부터 초보적 게임 이론을 이해할 수 있다. COMAP(2016)에서는 특히 초보적인 2인 제로섬 게임을 다룬다. 여기서

사용하는 방법은 여러 가지가 있으며 모두 초보적인 탐구를 통해서 이해해 나갈 수 있다. 사고를 통해서 방법을 찾고 이를 도구화해서 알고리즘으로 바꾸는 것을 훈련한다. 수학적으로는 전략에 따라 변화하는 제로섬 게임의 풀이에는 안장점과 같은 기하학적 개념이 숨어있음을 파악하고 각각의 문제에서 이것이 어떤 의미로 나타나는지를 본다.

5. 디지털 신호

디지털 시대가 됨에 따라 모두가 사용하는 주민등록번호와 같은 개인확인번호나 정보를 암호화하는 문제 등을 다룬다. 이런 초보적인 방법들이 현장에서 매우 유용함을 공부한다. 여기서 다루는 도구는 수학적으로 매우 단순하면서도 효율적인 것이다. 이중에는 주민등록번호나 우편번호나 도서번호 등의 식별번호, 도형이나 심벌을 사용한 코드, 글자의 컴퓨터 부호화, 암호를 만들고 푸는 방법 등을 공부한다.

6. 크기와 증가

우리가 다루는 대상을 파악하는 가장 초보적인 것으로 모양과 크기, 대칭과 패턴, 반복되는 무늬(타일링) 등으로 초보적인 유클리드 기하학과 초보적인 군론(Group Theory)을 활용한다. 여기서 활용하는 도구와 개념으로는 닮음과 비(ratio), 넓이와 부피, 수열과 점화식, 대칭을 나타내는 군, 프랙탈과 카오스에서의 패턴, 정다면체, 반복되는 무늬, 평행이동 및 대칭이동 등의 개념이 있다.

7. 금융과 자원에 관련된 문제

여러 가지 저축 및 대출과 이자, 자산을 관리하는 문제, 연금, 방사성 동위원소, 인구의 증가와 감소 등을 초보적인 계산을 활용하여 탐구한다. 여기서 활용하는 도구로는 이자의 단리와 복리, 초보적 수열, 지수함수 등을 사용하며 이러한 도구의 활용법 등을 공부한다.

나. 문제의 수학적 범주와 학습 방법

위와 같은 현실적 문제들을 학습할 때 익혀야 하는 수학적 내용의 범주를 개략적으로 알아보면 다음 〈표 6.1〉와 같다. 이 때 각 문제에 따라 필요한 수학적 내용은 큰 차이를 보일 수 있으며 그 수준의 범위도 달라질 수 있으므로 학습 목표를 적절히 세우고 이에 따라 수준을 설정해야 한다. 이 내용의 학습은 기존의 학습 방법과 유사한 계산 연습과 수학적 개념 파악 수업과 병행해서 이를 현실 문제에 적용해 보는 모델링 수업, 특히 문제 기반 학습과 프로젝트 기반 학습에 컴퓨터를 활용하기까지 범위를 넓혀서 학습해야 한다. 한편, 〈표 6.1〉에 제시된 모든 문제를 다 학습해야

하는 것이 아니라 이런 문제 중에서 적절한 내용을 뽑아서 이런 문제를 다루는 방법을 학습하는 것이므로 학습량을 적절히 조정할 수 있도록 하는 것도 중요하다.

〈표 6.1〉 대표적 일반 현실 문제와 이에 필요한 수학

문제	범주
도시공학, 비즈니스 효율성, 기획과 절차	이산기하학
선형계획법과 운송문제	기하학적 모델링, 부등식
자료의 분포	기하학적 표현, 자료 다루기
자료의 상관관계	자료 다루기, 벡터 계산
가능성 수치화	자료 다루기, 확률
사회적 결정, 투표	이산기하학
토너먼트 경기	이산수학
게임 이론 문제	조건하의 최대최소 문제
개인 식별 번호, 컴퓨터 부호화, 암호	이산수학(자연수, 집합, 대응)
이자와 연금, 방사성 동위원소	이산수학(수열과 급수), 함수
인구 증가	함수, 수열, 변화 개념
모양과 크기	기하학(공간 도형까지)
대칭과 패턴	도형, 초보적 대칭군
측정	기하학

위의 문제 중에 대표적인 몇 가지를 뽑아 다음과 같이 수학적 범주로 나누어 보았다. 이 도표에 나타낸 범주와 함께 모든 문제는 고등학교 수준의 이론적 계산을 밑바탕에 두고, 이를 알고리즘으로 바꿔 자동화할 수 있으며 이 과정의 처리를 컴퓨터에게 맡길 수 있다. 즉 이 모든 것은 계산 도구를 활용한 수학적 사고 문제, 즉 계산적 사고 문제이기도 하다.

한편 이산수학은 많은 경우 기하학적 표현과 맞물려 있다. 즉 경우의 수를 헤아리는(counting) 방법은 대부분 문제를 도형적 도표(그래프, 수형도, 표 등)로 표현한 다음 이를 토대로 헤아리기 때문이다. 상황을 나타내는 기하학적 아이디어에 따라 헤아리는 방법의 효율이 달라진다. 이렇게 헤아리기와 도형을 통한 표현이 맞물린 것을 ‘이산기하학’이라 부른다. 실제로 이산기하학이라는 분야는 매우 넓고 최근에 급격히 발전/부상하는 영역이다(이 기하학적 아이디어를 건너뛰어 결과적인 알고리즘에만 집착하는 순간 방법을 외워버리는 가장 바람직하지 않은 학습 방법이 되고 말며, 그러면 새로운 아이디어를 만들 줄 모르게 된다.).

또, 이산수학 다음으로 나타나는 기하학은 고전적 논증기하가 아니라 도형의 대수적, 조합적 성질과 공간 지각력을 중심으로 한다. 따라서 도형의 형태, 대칭성 등 직관적으로 파악 가능하면서도 대수적 규칙을 따르는 것이 중심이 되며, 고전

논증기하에서의 계산은 대부분 좌표 계산 및 벡터 계산으로 대체되어서 직관을 보완하는 역할을 한다.

1) 전문적 수학 지식 사용자를 위한 학습 내용 분류 예시

전문적 수학 지식이 필요한 사람들은 앞에서 제시한 일반적 수학 지식 사용자가 필요로 하는 수학 학습 내용과 함께 조금 더 수준 높은 수학 지식이 필요하므로 지금까지의 교육과정의 내용(3차 교육과정 이후의 모든 것)을 적절히 취사 선택해야 한다.

가. 중등 수학교육과정 영역의 내용

여기에서는 앞에서 언급한 수학적 범주를 다루는 데 사용되는 수학 학습 내용에 대하여 알아보기로 한다. 선행 연구 “수학학습 내용요소 추출 연구”(김영욱, 2015, 한국과학창의재단) 에서는 중등교육과정에서 보편적으로 나타나고 미래에 필요하다고 보이는 수학학습 내용요소를 추출하였으며, 여기서는 이해의 편의를 위해 이 내용을 크게 26개로 분류하여 학습내용군으로 제시하였다. 이를 도표로 나타내면 〈표 6.2〉과 같다(이 분류는 순수 및 응용 수학자를 대상으로 한 설문조사에서도 사용되었다.).

여기서 제시된 학습내용은 수학을 전문적으로 활용하는 모든 사람들이 꼭 공부해야 하는 것으로 대략 고등학교에서 마쳐야 하는 내용이다. 〈표 6.2〉에서 제시한 내용 중 개념의 번호가 2-10과 수학 셈법의 기초라고 할 수 있고, 11, 12 및 14-17은 고급 계산의 기초라고 할 수 있으며 13과 18-25는 현실문제에 적용하는 방법론의 기초라고 할 수 있다. 특히 1번 논리는 모든 수학 내용을 확인하는 수법의 기본으로 이 중의 증명법은 깊이있게 다룰 필요가 있으며 기초적인 논증 방법인 증명법과 함께 이를 활용한 예로서 논증기하의 기초적 증명을 다룰 수도 있다. 이 경우 문제기반 학습 형태로 운영할 수 있으며 논증기하의 몇 가지 내용을 소재로 활용하는 것도 바람직하다.

나. 현장에서 활용되는 수학 내용의 얼개

다음에 제시하는 〈표 6.3〉는 대학 수준의 수학 가운데 현재 산업 현장에서 가장 많이 활용되는 것을 큰 범주로 뽑은 후 이런 범주의 수학을 제대로 이해하기 위해서 필요한 중등교육과정의 학습 내용을 〈표 6.2〉에서 골라 ‘필요한 기초 내용’ 칸에 적은 것이다.

〈표 6.2〉 중등 수학교육과정의 수학 학습 내용 대분류

	영역	개념	중학교 내용	고등학교 내용
1	일반	논리	명제, 헤아리기(counting), 증명법	집합
2	일반/이산	논리	선택과 배열, 합의 법칙과 곱의 법칙 (순열과 조합)	이항정리, 포함배제의 원리, 비둘기 집의 원리
3	일반	수체계	수의 구성	수학적 귀납법
4	대수	다항식과 계산	다항식과 계산	
5	대수	방정식	방정식	
6	대수/이산	수열	규칙, 점화식, 생성함수	
7	대수/이산	급수, 이자		급수, 이자
8	대수/이산	게임과 의사결정		게임과 의사결정
9	대수/기하	벡터셈		벡터의 셈과 행렬 곱셈
10	대수/기하	벡터의 내적		평면벡터의 내적
11	해석	함수	함수 개념, 다항함수, 그래프	유리 함수
12	해석	함수		지수, 로그, 삼각 함수, 그래프
13	해석	부등식	부등식 계산, 영역과 최대최소	
14	해석	극한과 연속		극한과 연속
15	해석	미분		미분, 미적분의 기본정리
16	해석	적분		넓이와 적분
17	해석	최대최소		최대최소
18	기하	좌표		평면과 공간의 좌표
19	기하	평면기하	도형의 위치 관계	직선 원의 방정식, 이동
20	기하	평면기하		이차곡선
21	기하	공간기하		공간 도형의 위치 관계, 직선 평면 구의 방정식, 이동
22	이산/기하	도표와 그래프	각종 도표, 그래프, 그래프의 활용	
23	확률	확률, 조건부확률		확률, 조건부확률
24	통계	데이터 표현법	도표, 도형 표현법	
25	통계	확률분포	기대값, 표준편차	
26	통계	통계적 추청		통계적 추정

전문적 수학 지식을 활용하는 사람들은 이런 것을 자유자재로 사용할 수 있어야 할 것이며 따라서 중등교육 수준에서는 〈표 6.2〉의 수학내용군을 모두 잘 활용할

〈표 6.3〉 수학의 기본적 응용에 활용되는 수학 내용 (대학 수준까지)

수학 언어	필요한 기초 내용	새로운 내용
기호	1,2,3,4,9,11,18,22	시각화된 기호, 24
복소수	3,4,5	
좌표	3,9,11,18,19,21	
함수	1,3,4,11,12	
극한/연속	3,6,7,11,14	
한계(상한, 하한)	1,2,3,6,7,11,12,13,17,26	
영역의 볼록성	1,3,4,5,11,12,13,17	
Order of magnitude	11,12,14	
미적분	,11,12,14,15,16,17	
ODE/PDE/DE	11,15,16,18,19	
점화식	1,2,3,6,7,22	
다항식/유리식	1,3,4,11	
특수함수	11,12,14,15,16,	
멱급수	11,12,13,14,15	
행렬/벡터	2,6,8,9,18,19,20,21,22	
선형공간 <,> ; ⊥ ; 차원 ; 쌍대	8,9,10,18,19,20,21	
작용소	9,10,11,12,15,16,18,19,21	
안정성/condition number	11,14,15,18,19,21	
벡터해석	11,12,14,15,16,18,19,20,21	

수 있어야 한다. 이 수학내용군의 학습의 깊이는 필요와 시대 변화에 따라 적절히 조정되어야 할 것이다.

여기서 〈표 6.3〉의 수학언어 중 ‘미분방정식(ODE/PDF/DE), 특수함수, 멱급수, 선형공간, 작용소, 벡터해석’ 등은 대학교 교양수학 수준의 내용을 알 수 있다. 이 표를 보면 이런 수준의 수학 학습에 고등학교 수준의 학습 내용이 어떤 관련을 가지고 있는지를 보여준다.

2) 데이터 분석과 관련된 학습 내용

통계 단원은 최근의 수학 발전과 산업 문제의 변화에 따라 매우 큰 변화를 겪고 있다. 과거의 확률론 기반의 통계학은 계속해서 많이 활용되겠지만 정형화되어서 컴퓨터 프로그램의 기능에 의존하는 경우가 많아질 것이다. 반면에 새로운 데이터 분석 문제는 새로운 기법을 양산하고 있다. 이에 따라서 새로운 데이터 분석의 기초를 다지기 위한 필요한 수학 학습 내용이 무엇인지 알아보기로 한다.

가. 데이터 분석의 기본 개념

각종 측정도구의 발달로 우리는 많은 데이터를 다루게 되었다. 데이터의 형식에는 이미지, 변화하는 이미지의 열, 다변량의 시계열, 구조화되지 않은 텍스트, 그래프, 센서가 측정한 양의 스트림, 메시데이터 등이 있으며 많은 경우 한 문제에서 이런

데이터가 복합적으로 생성된다. 이런 데이터를 처리하는 방법은 기본적으로 다음 도식을 따른다.

미처리 데이터 ⇒ 표현된 데이터 ⇒ 차원 축약 ⇒ 형태 인식 ⇒ 해석

Kamath(2015)는 이를 그림 ??과 같이 나타내고 있다.

데이터의 기본적인 형태는 다음과 같다. 데이터에서 각 품목을 I_k라 하고 각각의 품목이 가지는 d가지의 특성을 $f_1, \ldots, f_d$라 하여 I_k의 특성은 $f_{k1}, \ldots, f_{kd}$로 나타내어 진다고 하면 아래 그림과 같은 도표로 나타낼 수 있다. 그리고 이 각 품목의 특성의 결과로 O_k라는 출력된 데이터를 얻는다고 하자. 즉 이런 데이터는 기본적으로 행렬꼴 또는 더 복잡하게 Array라는 꼴로 나타내어진다.

〈표 6.4〉 테이블 형태의 데이터. 각 요소 I_i는 d개의 특징을 가지며 출력된 결과 O_i를 가질 수 있다.

	f_1	f_2	$\cdots$	f_d	O
I_1	f_{11}	f_{12}	$\cdots$	f_{1d}	O_1
I_1	f_{21}	f_{22}	$\cdots$	f_{2d}	O_2
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
I_1	f_{n1}	f_{n2}	$\cdots$	f_{nd}	O_n

이런 데이터를 분석하는 방법은 너무 많다. 데이터에 따라 그에 맞는 방법을 새로 만들어야 할 정도이다. 이렇게 방법의 종류가 많아지면 자신의 용도에 적합한 방법을 찾을 때 각 방법의 기본적인 작동 방식을 이해하지 않으면 안된다. 예를 들어 데이터 분석에서 기본적인 작동 방법이란 예를 들면 데이터 표현 방법에서 주어진 데이터의 특성에 따라 표현 방법도 달라지고 이를 다루는 도구도 달라지게 된다. 한편 잘 표현된 데이터의 차원을 축약하는 도구도 수없이 많으며 지금도 계속해서 새로운 방법이 개발되고 있다. 이들의 특성은 미묘하게 달라서 단순히 몇 가지로 분류할 수 없다. 그리고 축약된 데이터에서 형태를 인식하는 기술도 계속해서 새로운 방법이 만들어지고 있고 각각은 서로 전혀 다르다. 그리고 이 세 스텝에서 선택된 방법들을 얼마나 잘 사용하는가가 다음 스텝의 성공에 큰 영향을 미친다.

이런 복잡한 상황에서 자신에게 맞는 도구를 제대로 선택하려면 그 각각의 도구가 정확히 어떤 계산을 하는지는 모르더라도 전체적으로 어떤 이론의 어떤 특성을 활용한 것인지는 이해해야 한다. 즉 수만가지 경우를 찾아보면서 선택하는 것은 불가능하고 이의 기본이 되는 수십가지 이론을 이해하고 이를 통해서 좁혀나가는 것이 매우

효율적인 기법이 될 것이다. 즉 미래세대는 이런 기본적인 이론에서 현장 문제의 방법을 도출할 수 있는 능력을 갖춰야 한다.

나. 데이터 분석의 문제적 특성

이런 문제의 특성은 다음과 같다. 여기서 각 특성을 위해 필요한 수학에서 계산은 대부분 컴퓨터가 하게 되며 이를 다루는 사람은 개념적인 이해가 꼭 필요한 상황이다.

1. 데이터가 이산적 형태로 주어진다.
2. 이를 다루는 일차적 방법은 행렬과 벡터를 사용한 분석이다. 여기는 선형대수의 기본 개념이 꼭 필요하다.
3. 다음에 사용되는 방법은 이산적 데이터를 연속적 데이터로 간주하고 차원을 줄여나가는 방법이다. 여기는 공간지각력을 활용한 기하학적 방법이 필요하다. 대부분 적절한 정사영과 이에 따른 거리의 이론적 계산. 그리고 이와 관련된 최대최소 문제와 이의 도형적 의미를 이해하는 것이 중요하다.
4. 여기서 이 데이터의 형태를 결정하는 문제는 첨단수학의 모든 이론이 적용 가능한 부분으로 이미 지난 20년 동안 20세기 수학의 정수들이 활용되기 시작하였다. 수학자가 아니면서 이런 방법을 이해하려면 수학을 단계적으로 이해하기보다는 예를 들면 공간지각력을 활용해서 여러 가지 도형을 분석해 보는 방법을 사용한 경험적 방법을 사용하는 것이 더 적절할 것이다. 즉, 미래의 대부분의 사람들은 고급 수학을 이런 방식으로 이해해서 자신의 필요에 맞춰 나가야 할 것이다.

다. 데이터 분석을 위하여 공부해야 할 것들

고등학교부터 대학 초년 수준에서 이런 방법에 적용할 수 있는 내용은 단연 선형대수와 행렬의 이론 특히 1차함수와 2차함수의 이론일 것이다. 그리고 최소값을 구하는 정사영문제의 풀이법을 도형적으로 이해하고 활용하는 것이 또 다른 필요한 기법이다. 그리고 당연히 변수가 여러 개인 함수를 다루게 되므로 공간기하를 많이 다뤄본 경험이 꼭 필요하다. 따라서 고등학교 수준으로 다음 이론들의 개념적 이해가 필요하다. 한편 이들의 계산을 숙달하는 것은 수치적 계산은 많이 필요 없고 문자계산의 숙달이 필요하다.

1. 벡터, 행렬, 평면좌표, 공간좌표
2. 연속 개념과 연결 개념, 연속체 개념, 차원 개념
3. 다변수 일차함수의 그래프 개념
4. 평면에의 사영, 연립일차방정식

5. 2차곡선, 2차곡면
6. 곡면에의 사영, 거리함수의 최소 문제

이런 모든 것을 고등학교에서 대학교 저학년까지 동안에 숙달하려면 초등학교부터 이산데이터 다루기와 도형과 함수의 관계 등을 예를 통하여 습득해 나가야 한다. 이를 위해서는 구체적 문제에 대한 모델링이 좋은 방법이다.

3) 모델링과 관련된 학습 내용

이미 선진국의 고등학교 교과과정에서는 여러 형태로 모델링 수업이 이루어지고 있다고 보인다. 미래세대에게 가장 중요한 수학적 사고법의 습득은 이런 프로젝트 기반으로 문제 해결 기법을 공부하는 것이 필요하며 최대한 빨리 제대로 도입해야 한다.

수학에서 모델링을 다루는 것은 쉽지 않다. 우리나라 현재의 교육 여건에서는 많은 난관을 극복해야만 제대로 모델링 교육을 할 수 있을 것이다. 여기서는 몇 가지 가능성을 제언하는 정도로 만족할 수밖에 없으며, 여기서 제시하는 내용은 현재의 응용가능한 수학의 일부를 제시한 것에 불과하다. 다음에서 제시하는 모델링 수업에서 다룰 수 있는 현실 문제는 대부분 단순하고 고등학교의 수학만으로 충분히 해결할 수 있다.

가. 모델링 수업에서 고려할 내용

1. 모델링 수업에서 하나의 재료를 선택할 때 그 교육적 효과를 고려하기에 앞서서 그 재료를 얼마나 깊이있게 다룰 것인가를 결정하는 것이 매우 어렵다: 대부분의 재료는 현실문제와 맞닿아 있어서 항상 더 생각할 부분이 있게 마련이다. 이것을 모두 잘라내면 인위적인 현재의 수학문제와 별다른 점이 없어진다.
2. 모델링 수업만으로 수학의 내용을 가르치는 것은 불가능하다: 지난 30년 동안의 경험을 통해서 문제를 기반으로 한 학습(problem based learning) 방법의 가장 큰 문제점은 배워야할 내용을 시간 내에 가르쳐줄 수 없다는 것이다. 따라서 기존의 교수방법과 새로운 모델링 수업의 적절한 배치와 연계가 매우 중요하다.
3. 모델링은 현실 문제를 다루므로 다른 과목과 혼동되기 쉽다: 내용은 지구과학에서 따 오더라도 어떻게 그 속에서 수학적 문제를 파악하고 구성하는가를 공부하는 것이다. 특히 학생들이 익숙하지 않은 지구과학의 내용은 이해할 수 있을 만큼만 전달받아야 하므로 전문가와 문답을 통해서 필요한 지식을 항상 얻을 수 있어야 한다.

4. 현실문제를 해결할 때는 많은 수학적 방법을 사용할 수 있으며 이 과정에서 배우지 않은 수학적 도구를 사용해야 할 가능성이 항상 존재한다: 꼭 배운 내용 범위 안에서 문제를 해결할 수 있는 문제를 선택하는 것은 도전성이 부족한 문제가 될 가능성이 높다. 배우지 않은 내용은 선생님이 현장에서 적절히 도와줄 수 있어야 한다.
5. 선생님의 능력이 매우 높아야 한다: 앞에서처럼 학생들이 필요로 하는 배우지 않은 높은 수준의 방법과 만났을 때 적어도 이론적으로 설명할 수 있어야 한다. 모델링을 담당하는 교사는 오랜 기간에 걸쳐서 꾸준이 폭넓은 범위의 수학을 익혀나가야 한다. 반면에 선생님도 잘 다루지는 못하는 내용을 같이 토론하면서 학생들이 수학을 대하는 방법을 배우도록 해야 한다.

나. 중학교용 모델링 과정 예시

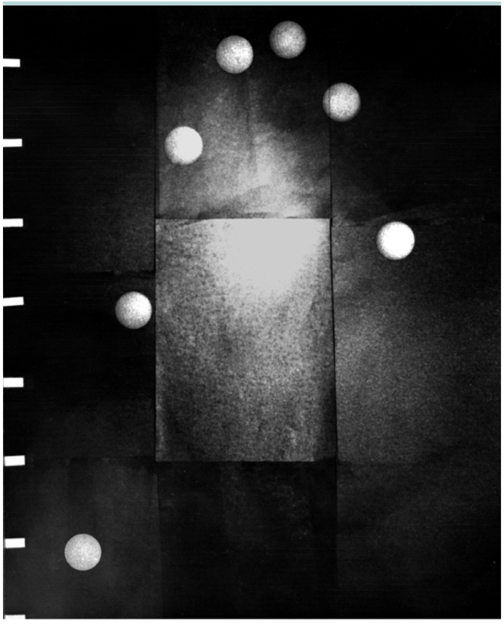
단순한 문제로 중학교 수준의 프로젝트의 예를 하나 들어보면, 물리와 연계되어 공중으로 던진 공이 일정한 시간간격으로 어떤 위치에 있는가를 알아보는 것이 있다. 학생이 직접 측정할 수도 있고 이미 측정된 데이터를 가지고 시작할 수 있다. 데이터는 수치적인 것이 아니라 사진으로 찍은 것도 가능하다(스트로브를 써서 찍은 공의 사진을 쉽게 구할 수 있다.).

여기에서 직접 자로 재거나 하는 방법으로 일정한 시간간격으로 각 시각의 높이를 데이터로 바꾸고 이를 가장 적합한 함수로 나타내 보며, 이것이 어떤 의미를 가지는 지를 수학적으로 분석해 내는 등의 문제는 실제 문제를 분석하고 파악하는 데 수학을 어떤 식으로 활용할 수 있는지, 그리고 그 과정에서 모르는 수학을 어떻게 발견할 수 있는지를 체험할 수 있는 문제이다.

예를 들어 COMAP의 모델링 교과서에 모델링 연습문제로 사진과 함께 다음 문제가 주어졌다.[2]

1. 여기서 각 플래시가 터진 시각의 공의 높이를 재서 도표로 만든다.
2. 시각에 대한 공의 높이에 2차함수가 잘 맞게 되는 이유를 설명해 본다(앞에서 2차함수의 특성을 공부한다.).
3. 이 공이 높이 0을 지난 시각을 찾는다.
4. 이 공이 가장 높이 올라갔을 때의 시각과 높이를 찾는다.

[2] S. Garfunkel, L. Godbold, Henry Pollak, Mathematics, Modeling Our World (2nd ed.), 2010, p. 636.



〈그림 6.1〉 던져진 공 사진 (눈금은 10㎝)

여기서 만들어진 도표의 예는 〈표 6.5〉과 같다.

다. 고등학교 모델링 과정 예시

2015개정 수학과 교육과정에 보면 ‘고급수학II’에서 모델링 과정에 대하여 다음과 같이 정의하였다.

> 수학적 모델링은 자연과 사회의 다양한 현상을 수학적 모델로 표현하고, 이를 수학적 방법으로 해결한 후 그 결과를 활용하여 주어진 실생활 문제를 해석하고 설명하는 모든 과정이다.

그리고 이를 위한 내용요소로 수학적 모델링, 그래프와 모델링, 행렬과 모델링, 미분방정식과 모델링을 제시하였다. 이 부분은 아마도 이 이상 더 자세하게 설명할 수 없어서였겠지만 이 네 가지는 내용요소라기보다는 중분류에 더 맞다. 그리고

〈표 6.5〉 공의 높이를 재서 만든 표

플래시 회수	높이 (㎝)
1	19.0
2	48.7
3	69.5
4	80.7
5	82.4
6	74.8
7	57.5

여기서 제시된 모델링 문제는 고등학교에서 다루기에는 어려운 내용도 있다. 적어도 미분방정식을 활용하는 모델링은 쉬운 문제도 고등학교 미적분을 잘 알아야 한다.

여기서는 이와 유사한 모양으로 다음과 같이 모델링 학습내용을 제시한다. 여기서 제시하는 것은 2015개정 수학과 교육과정에서 제시한 것 중에서 일부를 뽑고 그리고 그 밖의 것을 일부 추가한 것으로, 고등학교에 적합한 내용은 다음 세 가지가 우선시 되어야 할 것이다.

1. 헤아리기(counting)와 관련된 문제의 모델링: 조합, 그래프 등을 활용한 모델링.
2. 기본적 도형의 성질을 활용한 모델링: 이산적 도형 문제를 모델링하는 것.
3. 2개 이상의 1차 및 2차함수와 관련된 모델링: 행렬을 활용한 모델링.

라. 헤아리기와 관련된 모델링 문제

헤아리기와 관련된 문제는 제 7차 교육과정의 이산수학에서 충분히 많이 다뤘다. 본 보고서에서도 앞에서 '일반적 수학 지식 사용자를 위한 학습 내용'에서 제시한 문제들은 대부분 헤아리기와 관련된 문제이다. 이 가운데 어떤 문제도 현실적인 문제와 연계되며, 모델링 문제로 적합하다. 단지 학생들의 수준에 맞게 제시해야 하며 같은 유형의 문제라도 차원을 하나만 올리거나 하면 매우 어렵거나 아직 풀줄 모르는 문제가 되므로 조심해야 한다. 따라서 이산수학의 여러 문제들은 공식을 외우고 적용하는 종류의 수업에 맞지 않는다. 이들은 탐구하고 토론하고 방법을 찾아보는 모델링에 적합한 문제들이다. 특히 그래프나 도형과 연계된 문제가 많다.

기초적 합의 법칙과 곱의 법칙을 활용하고 시각적으로 표현된 것에서 헤아리기를 통하여 문제 해결 방법을 찾아가는 대표적인 문제들로 다음을 예로 들 수 있다.

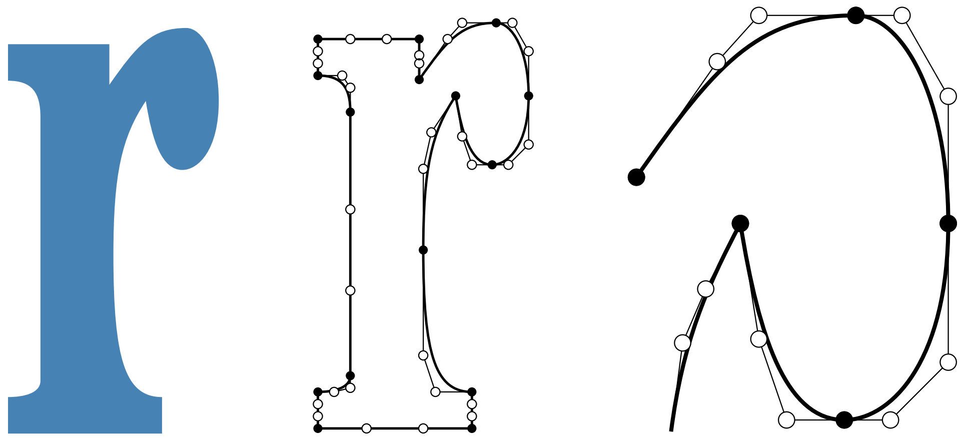
1. 여러 등산로를 조합해서 목표지점에 도달하는 방법을 구하는 문제
2. 봉투에 편지를 넣는 경우의 수, 알파벳으로 단어를 만들어나가는 경우의 수 등을 헤아리는 문제
3. 학교에서 학생들이 반을 나누는 경우의 수, 여럿이서 물건을 나누어 갖는 경우의 수를 헤아리는 문제
4. 여러 도시 사이에서 인구 이동의 경로를 헤아리는 문제
5. 두 사람이 두 가지 전략으로 제로섬 게임을 할 때 일어날 수 있는 경우의 분류 문제와 전략의 수가 늘어날 때를 토론해보는 문제
6. 대통령을 뽑기 위한 여러 가지 선거 방법이 만들어낼 수 있는 경우를 헤아리고 토론해 보는 문제

마. 도형과 관련된 모델링 문제

도형과 관련된 많은 개념들은 직관적으로 문제 해결을 도와준다. 이런 것이 잘 보이는 문제들과 도구들은 현대 계산기하학 등 분야에서 찾아볼 수 있으며 중, 고등학교 수준의 모델링에서 활용될 수 있다.

1. 앞에서 제시한 행렬을 활용한 모델링 가운데서 사진 자료 압축 문제는 일반적으로 매우 중요한 각종 그래픽 응용 문제에서 잘 사용되는 모델링 문제이다. 차원을 낮추는 방법으로 대표적인 푸리에 방법과 웨이블렛 방법을 이산적으로 생각해볼 수 있다.
2. 많은 문제에서 볼록도형을 만드는 문제는 현실문제를 활용하는 모델링 기법이다. 주어진 점들을 포함하는 가장 작은 볼록영역을 convex hull이라 한다. 관공서의 위치를 정하는 데 활용되는 보로노이 다이어그램 등은 볼록영역의 성질을 활용한다.
3. 여러 조건 아래서 가장 짧은 길을 찾는 것은 다양한 기하학적 도구를 활용해야 한다. 다각형 내부에서 각 변을 한번씩 지나면서 가장 빨리 제 자리에 돌아오는 방법은 변에 대한 대칭이동을 활용한다. 대칭이동 같이 거리를 보존하는 변환을 활용하는 문제를 생각한다.
4. 전시관에서 모든 전시품을 감시할 수 있도록 카메라를 배치하는 문제는 영역을 삼각형으로 분할하는 방법을 검토하는 문제가 된다.
5. 사진 자료를 분석할 때 물체의 윤곽을 기계적으로 분석하려면 간단한 미분의 개념을 사용한다. 이렇게 찾아낸 윤곽이 어떻게 연결되어 있는지를 기계가 분석하려면 차원을 줄여나가는 기법을 사용한다. 이런 개념을 잘 활용하는 것은 어려워도 기초적인 수준에서 이해하고 모델링하는 것은 중, 고등학교 수준에서 어렵지 않다.
6. 쉬우면서도 가장 많이 활용되는 도형 관련 문제는 2차 또는 3차함수를 활용하는 베지어곡선이다. 이를 활용하면 몇 개의 점의 좌표만 사용하여 복잡한 곡선을 만들어낼 수 있다. 이 과정에서는 내분점의 좌표와 2차곡선 (또는 3차곡선)만을 사용한다. 우리가 사용하는 컴퓨터에서 글꼴은 이런 방법으로 디자인된 것이다. 다음의 〈그림 6.2〉은 한 가지 예를 보여준다.[3] 이것은 다양한 산업에서 제품을 디자인할 때 가장 많이 활용되는 방법이다.

[3] 김영욱, 운형자, 베지에, 도함수, 수학과 교육 2011년 1·2월호, p. 59-65.



〈그림 6.2〉 글꼴 디자인: G. Farin의 Curves and surfaces for computer aided geometric design, Academic Press, 1988.

바. 행렬을 사용한 데이터 분석 모델링 문제

행렬은 우리 교육과정에 미적분보다 늦게 도입되었지만 대학에서는 문과 학생들도 어려움 없이 활용하는 비교적 단순한 이론이다. 이에 비하면 미적분을 이해하는 것은 실수부터 극한과 수렴, 미분개념 등의 많은 수학을 이해해야 하는 상대적으로 어려운 과목이다. 수학을 현장에서 적용할 때는 변수가 한 개인 경우는 없다. 항상 여러 변수가 나오는데 이때 가장 쉬운 함수가 일차함수와 이차함수이다. 이 두 가지를 다루는 수학적 방법이 행렬이다. 따라서 이 계산 없이는 미적분도 없고 아무 것도 안 된다. 여기서는 다른 배경 없이 행렬을 활용한 모델링이 가능한 문제들을 나열한다.[4]

1. 화학 반응식의 계수 맞추기: 화학 물질의 반응에서 중요한 것은 반응하는 화학 물질들의 반응비이다. 주어진 반응식의 계수는 모두 자연수가 되어야 한다. 이 조건은 계수를 변수로 한 연립일차방정식이 되며 행렬을 사용하여 해결할 수 있다.
2. GPS의 원리는 여러 개의 위성에서의 거리 차를 활용한다: 여러개의 위성에서 동시에 발신한 신호라도 수신하는 사람에게는 위성에서의 거리가 각각 달라서 그 수신 시각에 차이가 난다. 이 차이를 재서 이 사람의 위치를 계산하는 기법이다. 이때 위성과 사람 사이의 거리는 3차원 공간의 거리이므로 좌표의 2차함수이다. 따라서 여러 위성에서의 거리차는 결국 연립일차방정식이 된다.
3. 연결망의 방정식은 행렬로 분석할 수 있다: 도로, 전류가 흐르는 전깃줄, 컴퓨터 회로, 전화선, 인간의 뇌의 구조 등은 모두 복잡한 회로이다. 이것의

[4]김희준, 과학영재교육 진흥연구사업 보고서, 과학기술부 및 한국과학재단, 2005

상황을 파악하는 방법은 이 회로를 나타내는 연립일차방정식을 이해하는 것이다. 기초적으로 여기서부터 여러 법칙이 나온다. 전기회로라면 결국 오옴(Ohm)의 법칙이나 키르히호프(Kirchhoff)의 법칙으로 귀결된다.

4. 최소제곱법 문제: 앞에서 소개했던 주어진 데이터에서 최소제곱법을 활용해서 최적인 직선의 방정식을 구하는 문제이다.
5. 자료의 압축 문제: 예를 들어 주어진 디지털 사진은 매우 많은 각각의 점에 그려진 화상의 색깔과 밝기 데이터를 모아놓은 것이다. 이것에서 규칙을 찾아서 일부분의 데이터를 없애고도 원래의 그림을 훼손하지 않도록 파일의 크기를 줄이는 문제는 현대의 가장 중요한 문제이다. 이런 방법을 높은 차원에서 필요없는 방향을 없애나가는 단순한 방법을 사용한다. 여기에 행렬 이론의 기본이 사용된다.
6. (고급) 연립일차점화식으로 주어진 관계는 행렬을 사용해서 표현할 수 있고 이 관계가 반복될 때 변화하는 변수들은 행렬 이론의 대각화를 사용하면 좋다. 예를 들어 피보나치 수열의 일반항을 계산하는 여러 가지 방법을 알아보고 마코프 과정의 응용문제를 알아본다.
7. (고급) 초기 경제학의 레온티프(Leontief) 모델링 방법을 공부하고 행렬 응용의 강력함을 알아볼 수 있다.[5]

사. 고교 수준에서 쉽게 접할 수 있는 모델링 문제의 예

일반적으로 고등학교의 다항식 계산까지의 수학을 배경으로 탐구해 볼 수 있는 수준의 모델링 문제는 많으며 예를 들어 다음과 같은 것을 들 수 있다.

1. 주어진 데이터에서 적절한 함수를 뽑아내는 것: 보통 최적 함수 찾기로 알려진 최소제곱법 문제이다.
2. 강도를 측정하고 분석하는 것: 자연에서 주어지는 강도(꼭 물리적 힘의 세기만을 뜻하는 것은 아니다)는 항상 양의 수로 주어지며 이를 비교하는 것은 두 수의 차가 아니라 두 수의 비이다. 따라서 지수적으로 변화하게 되며 로그함수를 활용해야 한다. 이런 예를 통해서 지수적 변화의 개념을 익힌다.
3. 낙하하는 물체: 물리적 성질을 데이터를 측정해서 익힐 수 있다. 다항식과 다항함수의 모델링.

[5]김영욱, 행렬, 고윳값 그리고 경제학, 수학과 교육, 2010년 5·6월호, p. 57-63.

4. 화학 반응식의 계수 맞추기: 화학 물질의 반응에서 중요한 것은 반응하는 화학 물질들의 반응비이다. 주어진 반응식의 계수는 모두 자연수가 되어야 한다. 이 조건은 계수를 변수로 한 연립일차방정식으로 모델링할 수 있다.
5. 주기적 현상: 주기적으로 일어나는 현상으로 달의 모양 변화, 일년 중 해의 움직임, 조석간만의 차, 큰 파도나 파동현상 등을 들 수 있다. 이를 측정한 데이터를 활용해서 적절한 계산을 해 본다. 특히 계차수열을 활용할 수 있다.
6. 크기와 위치를 측정하기: 위치와 크기 등을 측정하는 것은 피타고라스 정리를 활용한다.
7. 상대적 위치: 어떤 지점을 중심으로 다른 지점의 위치를 나타내는 것은 직관적으로 방향과 거리를 사용한다. 이런 활동을 통해서 극좌표의 개념을 익힌다.
8. 여러 상품을 여러 공급체에서 조달받는 관계 등을 행렬로 나타내 본다: 행렬과 연립방정식을 활용한다.
9. 큰 원호에서 중심 찾기 등: 고고학이나 지질학은 숨겨있는 큰 원의 일부만을 발굴하고 중심이 어디인지 찾아야 한다. 이와 유사한 많은 문제는 2차곡선의 기하학적 성질을 활용한다.
10. 복권이나 추첨에서 당첨될 가능성을 계산하는 문제: 이런 문제는 헤아리기의 기본을 익힐 수 있다. 특히 합의 법칙과 곱의 법칙의 기본 개념을 확실히 할 수 있고 이항정리의 의미를 파악할 수 있다.
11. 물질의 운동이나 전쟁에서 해전의 작전 등 많은 문제에서 점화식의 응용문제가 나타난다. 이런 문제를 수치계산을 통해서 해결해 본다. 또 연립 점화식으로 유도될 경우 평형이론이나 카오스 이론 등을 소개해 줄 수 있다.

4) 미래세대를 위한 교과서

수학 교과에서 미래세대가 사용할 교과서와 읽을거리는 지금과는 많이 달라져야 한다. 한 종류의 교과서로는 너무 약하고 여러 종류의 읽을거리가 많이 주어져야 한다. 이 중에는 수학이 사용되는 인문학적인 읽을거리나 수학 소재의 소설 또는 수학을 발견한 역사상의 수학 내용 이야기와 수학이 산업현장에서 사용되는 이야기 등 많은 것이 가능하고 또 꼭 필요하다.

한편 교과서도 학생들에게 어렵지 않도록 설명을 잘 한 교과서, 문제 도입을 잘 한 교과서, 또 핵심만 뽑아 놓은 공식집이나 용법 설명서 등 다양하게 필요하다.

이런 모든 책을 쓸 때 생각할 점을 Stewart는 다음과 같이 들고 있다.[6]

1. 책의 형식이 관습적이고 틀에 박힌 형태일 수도 있고 격식없이 쓰여졌을 수도 있다.
2. 책이 자세한 내용을 설명할 수도 있고 간략히 쓰고 자세한 부분은 독자가 채우도록 할 수도 있다.
3. 설명할 때 기호와 수식을 써서 설명할 수도 있고 이를 말로 풀어서 설명할 수도 있다.
4. 설명 또는 증명이 길어질 때 이것을 죽 길게 쓸 수도 있고 몇 개의 부분으로 나누어서 설명할 수도 있다.
5. 책의 순서를 정할 때 설명하는 논리 순서대로 쓸 수도 있고 이 내용이 발견된 순서대로 쓸 수도 있다.
6. 한 가지 개념을 설명할 때 정의부터 쓰고 시작할 수도 있고 예를 먼저 들면서 시작할 수도 있다.

이런 모든 점을 고려할 때는 우리가 만드는 책이 어떤 용도인지를 파악하고 계획해야 한다. 현재의 교과서는 천편일률적으로 최소한의 공간에 최대한의 내용을 넣다 보니까 읽기 힘든 책이 되기 쉽다. 미래의 교과서는 위와 같이 가능한 한 다양한 형식으로 만들어져야 할 것이다. 또 지금까지의 책과는 다른 형식을 가질 수 있는 ‘이북’이나 ‘인터넷북’을 생각할 수 있다. 이런 책은 책 안에서 내용 검색이 쉽다는 이점이 있다 이런 것을 잘 활용할 수 있어야 한다.

한편 교육에서 사용할 수 있는 교재에 수학이 많이 관련된 소설이나 드라마를 활용할 수 있다. 특히 어떤 드라마에 나오는 수학은 충분히 논의를 할 만하고 이를 활용하면 얼마든지 깊이있는 모델링 강의가 가능하다. 초등학교는 수준 문제로 어렵겠지만 고등학교에서는 가능한 것이 많다.

즉, 미래세대를 위한 교육에서 교과서의 형태를 다양하게 개발하고 이를 쉽게 사용할 수 있는 도구도 함께 개발해 나가는 데 많은 노력을 기울여야 할 것이다.

제 4 절 대학 교육과 연계하여

초·중등 교육은 대학교육의 밑바탕을 이루는 교육이라 한다면, 대학 교육 시스템은 우리나라 산업의 발판을 만들고 국민 전체의 생활을 결정짓는 교육이다. 초·중등

[6] Stewart, “How to Write a General Interest Mathematics Book”, in N. J. Higham (Ed.), Princeton Companion to Applied Mathematics, Princeton, 2015, pp. 909-910.

교육의 뒤를 잇는 대학교육에서의 변화에 대해서 살펴보기로 한다.

네트워크와 ICT를 중심으로 인간의 생활을 풍요롭게 하겠다는 초스마트사회에서 새롭게 가치를 창출하려면 대학에서는 어떤 교육을 해야 하는지 알아볼 필요가 있다. 일본의 수리과학 및 데이터과학 교육 강화 간담회 보고서에서는 이를 위한 인재육성의 필요성에 대하여 다음과 같이 이야기 하였다.[7]

> “이와 같은 미래사회에서는 광범위한 목적으로 모은 데이터를 가지고 있으면 이들 데이터에 들어있는 본질적 구조를 보고, 수리적 사고를 기반으로 해석하고, 문제를 해결하는 능력이 필요하다. 또 이런 데이터 과학을 통해서 새로운 가치를 창출하고, 유용한 시스템 구축에 연결하는 능력도 필요하다. 이런 능력을 활용하면 인공지능이나 로봇, 센싱 등의 이공학 분야 뿐만아니라 학문 영역을 넘어서서 법률, 금융·보험, 건강·의료, 재해대책 등 사회 전반의 다양한 분야 발전에 기여할 것이라고 기대된다.”

한편 우리나라에서 2008년도 교육과학기술부 정책과제인 ‘이공계 인력의 경쟁력 제고를 위한 수학·과학 교수학습체계 개선방안’(위인숙 외, 2008. 과학기술부 정책과제.)은 대학교의 수학교육 개선안을 제안하였다. 이 연구는 당시 심화되고 있는 중등교육의 파행과 우리나라 학력의 저하를 야기한다고 보고 미래를 위한 교육 개혁 방안을 제시하고 있다. 특히 대학교육에서 기초과학의 중요성에 대하여 다음과 같이 설파하였다.

> “기초과학은 전체 학문 분야에서 필수적인 교과과정으로, 이공계에서는 전공을 위한 교양과정으로 인문사회계에서는 전인교육을 위한 교양으로 필요하기에 교양으로서의 체계적이며 내실화된 기초과학 교양 교과과정이 필요하다. 기초과학에 관한 전문적인 지식을 제공하여 기초과학 각 분야(수학, 물리학, 화학, 생명과학)의 전문가로서 career path를 염두에 둔 전공교육의 내실화를 통하여 과학자와 기술자, 기업인은 물론 기초과학 전문지식을 가진 다양한 전문직 종사자를 육성하는 전공 교육과정 체계 확립이 필요하다.”

새 시대의 대학 교육을 위해서 위의 두 보고서가 지적한 문제점과 제안하는 몇

[7] ‘대학의 수리·데이터 사이언스 교육 강화방안에 대하여(大學の數理·デロタサイエンス教育强化方策について)’, 일본 문부과학성, 2016.

가지 내용은 우리에게도 매우 중요하다.

1) 대학 수학에 연계된 제언

여기에서는 위인숙(2008) 등이 연구한 보고서 “수학·과학 교육학습체계 개선 방안”의 내용을 바탕으로 고교 및 대학 수학 교육 연계에 대하여 연구해 본다.

대학에서의 교양 수학교육을 고등학교 수학 학습내용과 연계해 보면 고등학교 심화선택과목 이수 여부에 따라 대학 학습능력이 큰 차이를 보인다는 문제가 지적되었다. 그리고 이에 대하여 다음과 같이 제언하였다.

> 인문 및 사회과학 계열의 전공자들은 수학과 통계학의 지식이 많이 필요하다. 경제학과 같은 일부 전공에서는 대학 수학의 많은 내용을 활용할 수 있게 하여야 하며 컴퓨터도 잘 사용할 수 있도록 교육하여야 한다 …(중략)… 단순히 계산 위주의 내용으로서가 아니라 이론적이고 추상적인 부분을 필요로 한다 …(중략)… 대부분 학과들에서는 어떤 구체적인 내용이 필요하다기보다는 일반적으로 수학적인 사고 방식의 습득 계발이 필요하다고 보인다.

그리고 이 방향으로 대학생들이 학습하여 습득할 능력으로 다음을 제언하였다. 이 보고서의 결과는 고등학교에서 이 방향으로의 학습 경험이 매우 중요함을 지적하고 있다.

- 논리적인 분석 방법, 논리적으로 논(論)하는 방법.
- 현실적 문제에서 고등학교 수준의 수학적 기법을 활용하여 문제를 해결하는 방법.
- 알고 있는 공식 수준의 기법으로 해결되지 않는 문제에서 확장된 적용방법을 스스로 개발하는 능력.
- 주어진 상황에서 필요한 데이터를 수집하는 능력.
- 주어진 데이터에서 필요한 정보를 파악하는 능력.
- 파악하고 해결된 문제를 다른 사람들에게 설명하는 능력.

그리고 이를 위한 구체적 학습 내용으로 다음과 같은 내용이 제안되어 있다.

1. 과정을 계획하는 법.
2. 최적화법: 예를 들면 linear programing 기법.
3. data 수집과 분석의 기초: 통계학적 기법의 기초 사고 방식.

4. 사회적인 선택과 의사결정 방법: game 이론적인 사고 방식.
5. 측정과 기하학적 형태에 따른 분석법: data를 가시적으로 수집하고 분석하는 법, 변화에 따른 분석법, 미분방정식의 기법.
6. 컴퓨터 프로그램을 활용하는 방법: 패키지 프로그램을 수학적 문제해결에 활용하는 방법.
7. 언어를 논리적으로 사용하는 방법: 언어 논리의 기본 원칙.
8. 논리적인 설명 방법.
9. 파악된 문제 및 해결법의 내용을 스스로 검증하는 법.

여기서 강조되는 학습 내용은 단순한 수학 문제 해결 능력이 아니라 문제를 모델링하고 데이터를 분석하며 컴퓨터의 계산력을 활용하는 것이고 이의 배경에서 논리적이고 수학적 사고력을 활용하는 것이다. 즉 앞에서 이야기한 것과 똑같은 경험을 통한 수학적 방법의 습득을 이야기하고 있으며 모델링하는 경험 수업의 중요성을 지적하는 것이다.

한편 현실적으로 이런 교육 개혁을 이뤄 내려면 개개의 대학에서의 연구만으로는 한계가 있다. 이 보고서는 이를 극복하기 위하여 대학 부설 기초과학교육지원센터의 설립을 추진하기를 제언하였다. 이런 교육지원센터에서는 다음과 같은 사업을 하여 교육개선에 도움을 줘야 한다.

1. 대학 교육에 필요한 통계자료 분석
2. 수학 및 과학 교양교육 개선 및 강화를 위한 제도 연구
3. 학부생 연구(UR, undergraduate research) 지원
4. 중·고등학교/대학/대학원 교육의 연계 방안 연구 등

이런 사업을 통해서 얻을 수 있는 효과는 체계적인 기초교육을 확립하고 전국적으로 전파하는 거점기관이 되어, 중등교육과 고등교육을 효율적으로 연계하여 양쪽의 교육에서 시너지 효과를 낼 수 있다고 보고 있다. 이러한 제안은 다음 절에서 소개한 일본의 수리과학 교육 관련 간담회의 제언과 일치함은 우연이 아니다.

이 보고서에서 제안된 많은 내용들은 우리 보고서의 초·중등 교육을 위한 새로운 교육 내용과 일정 부분 겹치며 실제로 이런 대학교육을 위해서는 초·중등 교육에서도 이런 교육이 필요함을 강조하였다. 그리고 위의 내용 가운데서 몇 가지는 이산수학적인 기법이며, 몇 가지는 데이터와 통계에 관련된 것이다. 한편 컴퓨터 프로그램을 익혀야 하며, 수학을 언어적으로 그리고 논리적으로 다루는 방법, 그리고 자신의 생각을 논리적으로 검증하는 것이 중요함을 이야기하고 있다.

이 밖에 대학 교양교육 및 전공 연계교육으로서의 수학 교육에서 사용할 수 있는 다양한 방법으로 학부리서치(UR, undergraduate research), 수학적 모델링 수업, 문제중심 학습(PBL, problem-based learning), 그리고 이들을 수학사와 연계하여 학습하는 방안을 제안하였다. 특히 문제중심 학습에서 사용하는 주제가 가져야 할 특징으로 다음을 들고 있다.

- 개념 도입에 적절할 것
- 내용을 가지고 있을 것
- 학습 목표에 부합할 것
- 관련 자료를 제공하여 줄 것
- 기대되는 결과가 확실할 것
- 길잡이 문제들을 가지고 있을 것
- 평가 문제들을 가지고 있을 것
- 전체적인 시간 계획이 있을 것

이런 점은 초·중등학교 교육에서 모델링, 문제중심 수업을 할 때 똑같이 적용되어야 할 특징이라고 하겠다.

2) 새로운 수리과학 내용과 관련된 일본의 제언

일본의 간담회 보고서는 위와 유사한 관점임에도 최근에 제기되고 있는 데이터과학과의 관련성에 중심을 두었으며 이런 점은 꼭 반영되어야 할 것이다.

일본 간담회 보고서와 대학 교양교육 관련 보고서가 똑같이 제안하고 있는 것은 이런 교육을 담당할 교육연구센터가 세워져야 한다는 것이다. 이런 센터는 단순히 교육을 담당하는 것이 아니라 교육할 내용을 만들어내는 중심축이 되어야 한다. 특히 모델링과 문제중심 학습에 필요한 소재를 만들어내는 것은 현장의 교사나 교수에게는 너무 벅찬 것이고 이런 수준 높은 위치에서 만들어진 것을 현장에 변형 적용하여야만 성공할 수 있다. 이 과정에 현장의 교사/교수들이 참여할 길도 마련되어야 한다.

데이터과학과 관련하여 현재의 문제점으로 지적된 것은 수학 및 통계를 일반기초교육과목으로 개설한 학교도 있지만 대부분은 이과계만을 위한 선택필수과목 정도로만 개설하고 있어서 많은 학생들에게는 접근이 불가능하다는 점과, 수리과학과 데이터과학이 사회에서 어떻게 활용되는 지를 가르치는 사람이 적다는 사실이다.

이런 점들은 센터를 통해서 해결 가능함을 보고서가 역설하고 있으며 센터가 담당해야 할 구체적인 내용으로 다음을 들고 있다.

- 학교 전체를 대상으로 조직적으로 수리과학 및 데이터과학 교육을 담당한다.
- 학생이 공부하는 학문 분야의 전문성에 맞는 수준을 다양하게 설정한다.
- 프로젝트중심 학습(PBL, project based learning)등 실천적 교육방법을 채용한다.
- 표준 교육과정과 교재를 만든다.
- 실천교육에 관한 산학연계 네트워크를 구성한다.

이런 내용은 초·중등학교의 교육 내용을 선정하는데도 똑같이 중요한 사항이다.

제 5 절 산업수학에 적합한 수학 학습 내용

미래세대를 위한 새로이 강조되거나 새로 도입되어야 할 수학 학습내용이 어떤 이유에서 도입되어야 하며 어떤 방향과 관점에서 도입되어야 하는가는 깊이 연구돼야 할 문제이지만, 여기서는 본 연구와 관련된 전문가들의 자문을 바탕으로 현재 우리가 판단할 수 있는 사항을 설명하기로 한다. 그 내용으로 이산수학, 기하학, 통계학, 모델링, 컴퓨터 활용(계산수학)으로 나누어 해설한다.

1) 산업수학에 적합한 수학 학습 내용으로서의 이산수학

가. 이산수학과 그의 특성

우리는 실용적 수학교육의 고려할 만한 내용요소로서, 특히 미래세대의 수학교육을 위한 학습 내용요소로서, 이산수학, 즉 조합수학 (wikipedia)을 지목, 강조한다. 셈(헤아리기, counting)으로 대표되는 조합수학(combinatorics)은 수학의 한 분야로서 주로 유한 집합에 대한 정보와 그러한 정보를 얻는 방법론에 대한 연구이다. Mazur는 조합수학을 유한 집합과 관련하여 집합의 크기를 구하고 어떤 대상 또는 구조의 존재를 밝히거나 찾고 어떤 양상(configuration)의 구성과 최적화 등에 관련된 수학으로 정의하고 (Mazur, 2010), Wilson은 어떤 대상들을 선택(selecting), 배열(arranging), 구성(constructing), 분류(classifying), 셈(counting)하고 목록 작성(listing)을 하는 활동과 관련된 수학으로 설명하였다 (Wilson, 2016).

이러한 조합수학은 2000년을 전후한 반세기 동안에 빠르게 발전을 거듭하여 수학 전 분야에 걸쳐 영향을 미치며 (Cameron, 2001; Lenart; Lovasz), 컴퓨터과학과 정보과학의 바탕 학문으로 작용하고, 특히 조합수학에서 다루어지는 수학적 아이디어는 최근의 빅데이터(big data)와 알파고(AlphaGo)로 유명해진 인공지능(artificial intelligence)에 따른 미래 산업구조의 변화에도 적용 가능하다.

조합수학은 1970년대 이후로 급성장을 하면서 수학 전반에 걸쳐 영향을 미치게 되었다 (Lovasz). 조합수학의 발전에는 많은 사람들의 기여가 있었지만 특히 Erdős의 영향이 컸다. 조합수학과 관련된 문제의 해결로 1998년에 Gowers가, 2006년에 Tao가 Fields Medal을 수상했으며 (Cameron, 2001), 2012년에는 Szemerédi가 Abel 상을 수상하였다 (Sletsjøe, 2012).

Cameron은 '3번째 천년을 맞이하는 조합수학' 이란 글에서, 컴퓨터와 정보통신기술의 발달로 인하여 조합수학이 자체적인 발전뿐만 아니라 다른 수학분야와의 연계가 강화되고 심지어 사회적 변화에도 영향을 미쳤다고 한다 (Cameron, 2001). 조합수학의 특성과 수학 내의 다른 분야뿐만 아니라 생물학, 경제학, 물리학, 컴퓨터과학 등의 다양한 전문 분야와의 연계 등에 관한 보다 자세한 설명은 Lenart, Lovasz, Mazur(2010), Wilson(2016) 등을 참조한다.

조합수학은 일반적인 현대수학이 담고 있는 공리 체계적 구조에 대한 이해를 크게 요구하지 않으며, 이론적이라기보다 실험적이고 알고리즘적이어서 가시적 효과를 내포 한다 (Lovasz). 그러므로 조합수학은 활동과 경험에 기인한 사고체계의 확립에 도움을 주며, 특히 문제의 이해가 쉬어 흥미 유발에 도움을 주며 놀이와도 같은 학습내용을 제공한다(Siu, 2016; Su, 2010). 이러한 조합수학에서의 탐구활동은, Erdős가 보여주었던 것처럼, 다양한 수학적 사실에 대한 문제 제기와 추측을 가능케 하는 창의적 사고에 영향을 준다.

Lakoff와 Núñez는 뇌와 사고활동이 연계되어 있고, 뇌는 운동과 공간의 이해 등의 다양한 사고활동에 감정, 언어, 추론뿐만 아니라 시각적으로도 상당한 영향을 받는다고 한다 (Lakoff, Núñez, 2000). Michael Atiyah도 모든 수준의 인지활동에 시각이 주는 효과가 대단함을 지적하였다 (Atiyah). 결국 수학교육에서도 시각적 효과를 노릴 수 있는 수업형태가 제공되는 것이 바람직한데, 조합수학이 그러한 환경을 제공할 수 있다. 즉, 조합수학이 학교수학에서 훌륭한 교육 효과를 낼 수 있는 학습요소가 될 수 있음을 의미한다.

나. 셈의 교육학적 의미와 중요성

교육은, 특히 학교교육은, 학생들의 사고체계를 확립시켜줌을 목표로 한다고 지적하였다. 그래서 수학교육은 연역논리를 제공하는 교과목으로서 창의성과 전문성을 배양시킬 수 있는 학습내용을 제공하여야만 한다. 공식이나 지식의 단순 적용에 의한 문제해결이 아니라 학생 자신의 생각과 판단 및 분별에 의한 시행착오를 거치는 경험에 의한 문제해결로, 학생의 창의적 사고체계를 정립할 수 있도록 학습내용이

제공되어야 한다.

한 때, 사람의 창의력이나 지능은 IQ 하나만으로 평가되었다. 그러다가 1983년에 Gardner가 다중지능을 주창하며 사람의 지능에 대한 인식에 변화가 일었다. 그 후 다시 Sternberg가 환경의 변화에 적용하며 자신의 능력을 발휘할 수 있는 성향을 나타내는 '성공 지능(successful intelligence)'을 주창하였다 (Sternberg, 1999). 성공지능은 Sternberg가 처음 주창하던 1985년에는 '삼원지능(triarchic intelligence)'으로 불리었으나, 학술적 의미의 지능이론이 아니라 환경을 수용하고 적응하며 응전하여 성공을 이끌어내는 실증적 능력으로 이해되어 성공지능이라는 이름으로 개명되었다. 성공지능은 분석능력, 창의력, 실천력으로 구성된다. 이때 Sternberg가 말하는 분석능력은 분석, 평가, 판단, 비교, 대조 등의 작업 수행능력을 의미하여 다분히 수학적이다. 이러한 분석능력은 Wilson이 조합수학의 활동으로 명시한 선택, 배열, 구성, 분류, 셈과 목록 작성 등의 활동으로 배양할 수 있다.

우리가 언어를 구사할 때는 사용 단어와 용어의 의미와 활용법을 정확하게 알아야 한다. 수학에서도 정의가 중요하고 그 의미 또한 중요한 이유다. 수학이 언어로 활용될 때의 수학의 기본 활용방법은 계산이고, 계산의 기본은 '셈'이다. 우리말에서 '셈'은 '헤아리기(counting)'와 '이해하기(understanding)'의 의미로 사용된다. 더 나아가 조합수학에서의 수학적 활동들을 의미하기도 한다. 이러한 셈이라는 수학적 활동의 수학에서의 중요성은 이미 잘 알려져 있다. 특히 셈으로 대표되는 조합수학은 유한 집합을 대상으로, 아니 그보다는 집합의 원소들을 대상으로, 다양한 분석능력을 함양할 수 있는 수학적 활동들을 수행할 수 있도록 해준다. 앞에서 미래세대에서의 수학의 중요성으로 수학의 언어로서의 기능과 인지활동으로서의 기능을 강조한 바 있는데, 조합수학이 이러한 기능을 함양할 수 있도록 도와준다. 특히 미래세대의 교육에서 강조하는 코딩(프로그래밍)에 사용되는 연역논리와 수학적 귀납논리에 의한 알고리즘의 구조, 그리고 빅데이터로 대표되는 자료처리를 위한 귀납논리의 기초적 이해를 돕는다.

이미 학교수학의 학습내용이 공식들로 가득 차 학생의 사고력 증진에 크게 도움을 주지 못한다면, 적정 수준의 조합수학을 미래세대 수학교육의 학습내용으로 제공하여 학생들의 흥미를 북돋우어주며 놀이를 하듯 자신의 생각과 판단에 따른 시행착오를 겪어가며 논리적, 창의적 사고력을 배양할 수 있도록 함이 바람직하다.

다. 이산수학과 미래사회

크로네커가 ‘신이 인류에게 자연수를 주었고, 그 외의 모든 것은 인류가 일구어낸 업적’이라는 말을 하였다. 여기서 ‘자연수’는 무엇을 의미할까지 그 의미에 대한 해석은 다양하겠지만, ‘자연수’는 아담과 이브가 선악과를 따먹음으로써 갖게 된, 인류가 신으로부터 부여받은 ‘판단능력’을 의미한다는 생각된다. 그렇게 이해했을 경우, 크로네커의 말은 결국 인류가 판단능력을 활용하여 인류만의 문명을 이루었음을 의미한다.

자연수로 표현된 인류의 판단능력은 ‘셈’이라고도 말할 수 있을 것이다. 그런 의미에서 새로운 창의적 사고력을 요구하는 새천년에 필요한 미래세대 수학교육의 학습내용으로 조합수학을 손꼽아볼 만하다. 이는 Wilson의 말에 따른 조합수학의 속성인 선택, 배열, 구성, 분류, 셈, 목록작성 등의 학생들의 활동을 유도할 수 있으며, 이는 Sternberg의 삼원지능, 즉, 성공지능의 분석능력, 창의력, 실천력에 해당하는 내용을 담고 있다. 특히, 정보화 시대에는 자료의 분석과 종합을 통하여 유용한 정보를 추출하고 그럼으로써 자신만의 지식을 창출할 수 있으며, 정보의 교환과 자기 지식의 정보화를 할 줄 알아야 하는데, 조합수학이 제공하는 학습활동이 그러한 능력을 훈련시킨다. 또한 그러한 과정을 통하여 논리적, 창의적 사고력이 배양될 뿐만 아니라, 상황의 서술로 주어지는 조합수학의 문제들에 대한 이해의 과정으로부터 과학적 글쓰기와 같은 역량 또한 배양이 가능하다.

이상의 논의에서 우리는, 산업과 삶의 형태와 내용이 혁신적으로 변화하고 있는 미래사회에서 성공적 역량을 갖춘 인재로 자라나기에 필요한 학교수학교육의 학습 내용 요소로 조합수학이 적절한 기능을 가졌음을 알 수 있다. 김정희는 자신의 책 ‘소설처럼 아름다운 수학이야기’의 프롤로그에서 “수학은 마음에서 나오는 것이니까요.”라며 수학 속에 담긴 정신을 강조하였다. 사실 수학이 인간 뇌의 인지작용에 의한 개념화라는 Lakoff와 Núñez(2000)의 말을 빌지 않더라도 수학은 사고체계를 훈련하기에 좋은 대상임은 분명하다. 그러한 수학 중에서도 시각적 효과를 다분히 사용할 수 있는 조합수학이 미래세대를 위한 수학교육의 학습요소로 적당함은 상당히 타당해 보인다.

그러나 조합수학에서 다루어지는 문제가 이해는 쉽지만 풀이가 매우 어려운 경우도 많아, 학생들의 도전을 야기 시킬 수 있는 장점이 있는 한편, 교육내용으로 합당치 않을 수도 있음에 유의하지 않을 수 없다. 그러므로 조합수학이 학교수학의 학습내용으로 제공해야 할 구체적 학습 내용요소에 대한 향후 연구가 앞으로 꼭

선행되어야 할 것으로 사료된다. 특히, 미래세대의 인재를 구축하는 일이기에, 그래서 국가의 경쟁력을 확보하고 국민의 삶의 질을 향상시키는 일이기에, 충분한 전문 인력과 재정적 지원, 그리고 충분한 연구 시간을 제공해야 할 것이다.

이산수학과 관련된 모델링 수업에는 다음과 같은 문제를 활용할 수 있다.

1. 여러 등산로를 조합해서 목표지점에 도달하는 방법을 구하는 문제
2. 봉투에 편지를 넣는 경우의 수, 알파벳으로 단어를 만들어나가는 경우의 수 등을 헤아리는 문제
3. 학교에서 학생들이 반을 나누는 경우의 수, 여럿이서 물건을 나누어 갖는 경우의 수를 헤아리는 문제
4. 여러 도시 사이에서 인구 이동의 경로를 헤아리는 문제
5. 두 사람이 두 가지 전략으로 제로섬 게임을 할 때 일어날 수 있는 경우의 분류 문제와 전략의 수가 늘어날 때를 토론해보는 문제
6. 대통령을 뽑기 위한 여러 가지 선거 방법이 만들어낼 수 있는 경우를 헤아리고 토론해 보는 문제

2) 산업수학에 적합한 수학 학습 내용으로서의 기하

가. 배경

20세기 후반부에 이전 100년 동안 노력을 쏟아부은 구체적 문제의 추상적 해결법이 완결되어 감에 따라 이를 활용할 수 있는 응용수학이 급속히 발전하기 시작하였다. 1950년을 전후해서 컴퓨터의 발전과 함께 기초적인 공학 문제들을 수치적 계산을 통해서 해결해 나가는 방법만이 사용됐는데, 점차 조금씩 고급 수학이 응용되기 시작했으며 21세기로 넘어가는 시점에서는 매우 다양한 분야에서 다양한 수학 이론이 응용되기에 이르렀다. 응용되는 수학 수준은 점차 단계적으로 올라가는 것이 아니라 갑자기 어려운 이론이 적용되기도 하는 무질서한 양상으로 이루어진다. 여기서는 몇 가지 예를 들어 이런 변화를 기술하고 이것이 의미하는 바를 논하려고 한다.

미래세대를 위한 수학교육은 산업의 변화에도 바탕을 둬야 한다. 미래 산업에서 필요한 기하학적 능력 중에서 될 수 있으면 많은 사람들이 알아야 하는 능력에 대해서 말해보자. 우선 당연하지만 미래사회에 대한 몇 가지 인식을 정리해 보자.

- 미래사회에는 산업발전에 수학과 그 교육이 중요하다.
- 선진국의 새로운 정책은 산업의 중심에 수학을 두고 있다.
- 미래사회는 모든 산업이 정보를 중심으로 재편되고 있다.

- 선진국의 교육 중심에 수학과 과학이 있다.
- 우리나라도 산업수학 육성 정책이 시작되었다.

그리고 이런 변화가 얼마나 빨리 우리 실생활에 영향을 미칠지 모르지만 지금 우리가 교육하려는 미래세대가 사회의 중심이 되는 시점에는 분명히 이런 변화도 본격적으로 현실이 되어 있을 것이 확실하다.

나. 기하학과 관련된 변화

기하학은 오랜 학문이지만 최근에 가장 급격하게 변화하는 분야이기도 하다. 이는 컴퓨터의 등장에 힘입은 것이다. 2000년 전 기하학 초기의 문제는 기하학적 양(선분의 길이나 다각형의 넓이 등)을 제대로 인식하는 것이었다. 데카르트의 좌표기하학이 나타나고서는 복잡한 모양과 움직이는 물체를 기술할 수 있는 방안으로 사용되기 시작하였다. 이것은 계산이 가능한 대상이어서 기하가 대수와 합쳐지는 계기가 되었다. 그 결과로 나타난 것은 미적분과 그와 관련된 다양한 계산법이다. 이것이 20세기 중후반까지의 기하학적 방법이라고 할 수 있다.

그런데 20세기가 끝나갈 무렵부터 기하학적 대상을 직접 그려볼 수 있는 도구가 발전되었다. 이미 20세기 중엽에 개발된 컴퓨터는 복잡한 계산을 통해서 상상으로는 너무 복잡한 대상을 정확하게 그림으로 표현해 주게 되었다. 이에 따라 몇 가지 발전이 뒤따랐다. 산업에서 이런 발전이 가장 먼저 적용된 곳은 기계 설계와 영화의 컴퓨터 그래픽(CG) 표현이다. 한편 연구 부문에서는 순수기하학의 많은 연구에서 컴퓨터의 문자계산과 그래픽 표현이 확실하지 않던 부분을 메워주며 발전하였다. 응용수학의 분야에서도 많은 발전이 있어서 데이터를 다루는 통계학에서 데이터나 분석 결과를 그래픽으로 표현하는 다양한 기법이 개발되었으며 지금은 폭발적으로 늘어나는 중이다.

즉, 컴퓨터는 계산을 도와주는 기계였는데 지금은 계산은 당연하고 이보다는 그림을 그려주는 것이 더 중요한 기능인 듯 보이게 되었다. 이런 그림이 중요한 이유는 수많은 숫자로 이뤄진 데이터에서 찾아낸 어떤 의미를 그림으로 손쉽게 알아볼 수 있게 해주기 때문이다. 20세기 말에 이런 기법이 발전할 때는 이 말대로 쉽게 알아볼 수 있었지만 점차 방법이 발전하면서 이런 그림조차도 의미를 이해하는 것이 어려워지게 되었다. 즉 일반적인 데이터를 표현하는데도 전문가가 아니면 표현된 그래픽의 의미를 파악할 수 없고 이런 표현법이 우후죽순처럼 늘어나고 있다. 미래를 사는 사람들은 주변에서 돌아다니는 많은 정보를 재빨리 얻고싶지만 쉽게 이런 정보를 이해할수 있게 해주는 것이 이런 그래픽 표현들인데 한 두 가지 표현방법을 이해하는

것으로는 정보를 얻기가 불가능하다는 뜻이다. 그러니까 정보표현법 해독능력(literacy) 즉 정보독해력이 가장 문제가 될 것이라는 뜻이다.

이 말을 다르게 해석해 보자. 지난 3000년 정도의 문명과 역사시대 동안에 정보를 받아들이는 것은 문자를 통해서였다. 따라서 사람의 능력을 가늠하는 것은 글을 읽을 수 있는가에 달려있었다. 이것이 문자해독력이고 이를 습득하기 위해 모든 사람은 태어나서부터 힘든 공부를 해왔다. 즉 수동적 의미에서 정보를 다루는 방법은 문자이고 이것은 모든 능력의 바탕이라는 뜻이다 (이를 바탕으로 능동적 의미에서 정보를 다루고 생산하는 쪽으로 넘어가야 고급 일을 할 수 있는 인력이 된다.). 이제 21세기를 사는 사람들에게는 문자 언어는 당연한 필수 능력이고 이 밖에 정보를 받아들이는 것은 수치정보에서부터이다. 그 이유는 세상에 있는 모든 정보가 문자 아니면 수치로 되어 있고 지금은 점점 수치로 된 정보가 늘어나고 있기 때문이다. 그리고 수치정보를 받아들이는 첫 단계가 시각화된 정보이다. 이것이 21세기부터 수학이 더욱 중요한 위치에 놓이게 되는 이유이고 지금부터 모든 학문, 기술, 산업이 수학과의 연계/융합이 필요한 이유이다. 앞에서 설명한 바와 같이 국제적으로도 영국 케임브리지 대학에서 NRICH 프로그램이나 새천년 수학 프로젝트와 같은 프로그램을 개발하여 이런 상황에 대처해 나갈 수 있도록 수학교육을 진흥하고 있다. (http://nrich.math.org/stemnrich)

다. 기하학에서 필요한 능력들

우선 지금까지 개발되었고 현재 개발되고 있는 이론/방법 중에 미래에 사용되지 않을 것은 없어보인다. 이런 방법론들 중에서 기하학적인 것으로 중요한 것은 다음과 같다.

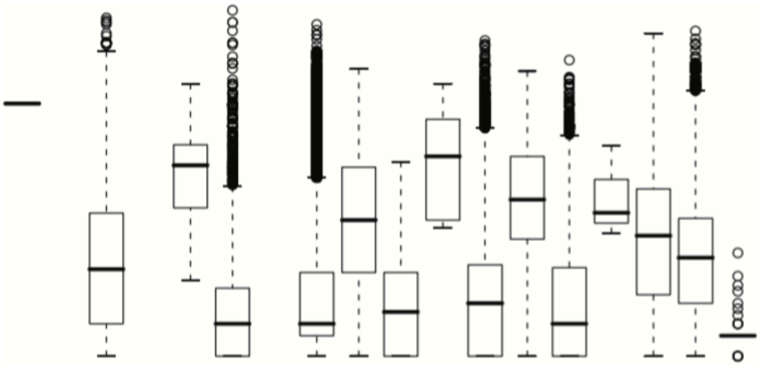
1. 고전적 기하의 논증 및 계산법
2. 현대적 기하의 계산법
3. 1차함수 및 2차함수의 이론 (선형기하학)
4. 위상 및 대수와 관련된 기하학적 방법
5. 시각과 관련된 기하학 (사영기하학)
6. 영상과 관련된 기하학 (리군의 이론까지)
7. 시각정보 분석/인식
8. 수치정보 시각화
9. 이산적인 정보의 조합적 분석
10. 이산적인 정보의 기하학적 분석

이 내용들은 과학 및 공학에서 그리고 이를 활용하는 산업에서 두루 쓰일 것이지만 이중 상당수는 전문가들에게 필요한 것이다. 이에 필요한 수학은 과학, 공학계열 진학자들이 필수로 익혀야 할 내용이며 그 바탕은 행렬이론과 미적분일 수밖에 없다.

문제는 이 방면의 전문가가 아닌 일반인들은 이 중에서 어떤 것이 필요할까 하는 것이다. 미국의 미래보고서에 강조되어 있는 바와 같이 일반인이 위의 기하학적 능력에서 필요로 하는 것은 몇가지로 압축된다. 일반인도 행렬 계산의 기초적 내용이 필요하게 된다. 행렬은 너무 광범위하게 사용될 것이기 때문이다. 그리고 깊이있는 공부를 하지 않아도 익힐 수 있는 내용으로는 첫째 위상과 조합을 사용하는 방법의 이해, 둘째 시각화된 정보의 판독, 셋째 이산적 정보의 기하학적 분석 결과의 이해로 생각된다. 전문가는 이런 정보를 잘 분석하겠지만 이 결과를 수학적 배경이 없는 사람들에게 설명하는 것은 쉽지 않다. 분석 결과가 단순히 좋다 나쁘다가 아닐 것이기 때문이다. 따라서 CEO도 주식투자가도 단순히 기계가 이렇게 해라 하는 것을 따라가지 않고 조금이라도 자신의 생각을 가미하려면 상당히 많은 수학적 지식을 가지고 결과를 읽거나 설명을 이해할 수 있어야 한다. 이런 부분은 일반인도 필요한 지식이 될 것이며 이런 독해력이 없는 사람은 현재 어려운 단어를 몰라서 매일 매일의 뉴스를 봐도 무슨 말인지 모르는 사람같이 될 가능성이 높다.

얼핏 이런 능력 대신에 “어떤 도표는 어떻게 읽으면 돼, 이런 것이 나오면 이런 뜻이야” 하는 공식같은 것을 몇 개 기억하면 충분하지 않을까 생각할 수 있지만 미래는 이런 방법의 효과가 매우 떨어질 수밖에 없다. 정보를 나타내는 새로운 방법이 계속해서 개발될 것이며 계속해서 공식같은 것을 만들어나갈 수 없기 때문이다. 그 밑에 있는 기본생각인 수학적 배경을 보고 스스로 이해하는 방법을 개발하지 않으면 금방 뒤쳐질 수밖에 없게 된다. 이는 마치 현재 스마트폰에서 이전 앱의 사용법을 그냥 무턱대고 외운 사람은 새로운 앱이 나오면 완전히 새로 공부해야 하는 것과 유사하다.

위에 언급한 행렬의 계산은 일정부분 옛날 식의 공부로 해결되겠지만, 이의 기하학적 의미를 활용하는 것, 시각화된 수치정보를 판독하는 것, 자신에게 필요한 내용을 세는 것(조합적 방법), 그리고 고차원 데이터에 대한 설명을 이해하는 것 등은 어릴 때부터 꾸준히 연습해야 하는 사항이다. 예전처럼 그림은 초등학교때 보고 나면 더이상 공부할 것이 없다고 단언할 수 없다. 위의 그림에 나타나는 것처럼 미래의 분석 결과는 수치로는 의미가 파악되지 않고, 도표로 나타냈을 때만 비교적 의미 파악이 용이하지만 그 조차도 많은 훈련이 필요한 것들이 대부분이기 때문이다.



〈그림 6.3〉 데이터 표현 2 (Boxplot). 예를 들어 하루 중의 주식값의 변동내역을 직관적으로 이해하려면 이 도표처럼 박스를 자주 사용한다. 박스 가운데 가로줄이 평균, 박스가 주로 움직인 범위 박스 위와 아래의 가로줄이 오늘의 최대 및 최소 가격 등을 나타낸다. 출처: A. Unwin 외 2명, Graphics of Large Datasets, Springer, 2006. p. 97.

라. 기하학과 미래사회

미래사회는 기계와 사람 사이의 의사소통이 가장 큰 문제가 되는 사회이다. 기계는 모든 것을 계산을 통해서 판단한다. 그리고 이 결과를 사람이 원하는 형태인 말로 바꿔줘야 한다. 이것이 쉽게 가능한가를 잠시 생각해 보면 당연히 어렵다하다. 지금까지는 컴퓨터가 계산한다는 것은 합과 곱, 평균, 표준편차 등의 단순한 계산이었다. 이 의미는 따로 설명할 필요가 없다. 그러나 최근에 발전하는 머신러닝(기계학습)에서 나오는 결과에 대한 설명은 사람들이 말로 표현할 방법이 없다.

지금까지 수학이 추상적으로 발전한 이유가 무엇인가를 보면 당연해진다. 수학이 추상적이 된 배경에는 사람들이 알아낸 사실을 가장 쉽게 말로 표현하려니까 추상적인 수학으로 써진 것이다. 기계도 똑같은 상황에 도달했으며 더이상 단순한 말로 표현할 수 없게 되었다. 이에 대한 대안은 엄밀성과 정확성을 포기하는 표현이 될 것이며 이렇게 되면 말은 더욱 더 복잡해진다. 즉 엄밀성을 포기하고 나타내는 것은 단순화된 기호, 특히 요즈음의 스마트폰 등이 지향하는 기호문자나 버튼 등이 초기 버젼이고, 이것이 복잡하게 연결된 네트워크 형태가 될 수밖에 없다. 앞에서 본 다양한 데이터를 나타내는 도표가 이의 한 형태이며 이런 것이 빠르게 진화해 나갈 것이다. 그리고 미래의 인간은 이런 것을 끊임없이 공부할 수밖에 없을 것이다.

이와 함께 고급 기하학이 필요한 전문가 집단은 다음과 같은 방법으로 필요한 계산 능력을 보충할 것이다. 우선 기하학에서 나오는 계산은 컴퓨터의 문자계산 및 수치계산 능력을 활용할 것이다. 이런 계산 결과를 종합하여 기하학적 내용을 이해하고 이를 다른 사람이 이해할 수 있는 표상으로 바꿔야 한다. 이 과정에서 가장 중요한 것이 계산 방법의 이해와 표상으로 바꾸는 각종 변환 과정을 수학적으로

이해하는 것이다. 통상적인 것은 이미 자동화되어 있겠지만 새로운 방법을 만들 때는 프로그램들을 잘 다뤄서 새로운 수학적 개념을 표현할 수 있어야 한다.

마. 산업수학에 적합한 수학학습 내용: 기하

앞에서 언급한 것과 같은 능력을 키우기 위해서 필요한 기하학 학습내용은 어떤 것이 있을지 살펴보자. 예전의 논증기하학이 수학의 논리적 사고방법을 가르치는 한 수단으로 수백년동안 사용되었던 것에 비하면 지금은 다른 많은 수학이 논리적으로 설명되고 있기 때문에 논증 교육을 위하여 기하학을 사용할 필요성은 줄어들었다고 하겠다. 따라서 기하학은 본연의 목표인 공간지각력과 각종 도형과 도표의 해석능력, 세밀한 도형의 성질을 파악하는 능력 등이 중요하다. 예전과 달라진 점은 초등학생이 습득하는 수준이 아니라 고차원적인 수학을 기하학적으로 표현하고 이해할 때 필요한 능력 수준도 상당부분 익히지 않으면 안된다는 것이다.

앞에서 설명한 조합적인 기하학, 즉 기하학적인 세기 또는 헤아리기나 공간지각력은 고등학교까지도 계속해서 훈련하지 않으면 제대로 습득되지 않는다. 단순한 문제풀이는 도움이 되지 않고 많은 실제 상황을 경험하고 깊이 분석해보는 활동이 필수적이다. 이는 복잡한 문제 또는 현실 문제를 프로젝트 형태로 수행하며 여러 사람이 토론하고 선생님의 보충 지도를 통해서 습득할 수 있음이 자명하다. 문제 하나를 봐도 실제로 해 보거나 컴퓨터에서 여러 방향으로 들여다보는 식으로 시간을 충분히 가지고 공부하여야 할 부분이다.

보통 잘 설명하는 한붓그리기 등에서 시작하여 여러 가지 2차원 및 3차원 도형의 조합적 성질, 사영한 결과와의 관계, 두 도형의 교차가 만들어내는 새로운 도형의 성질 등을 여러 가지로 경험해봐야 하고 몇 가지 공식적인 사실을 기억하는 것으로는 불가능하다. 이 과정에서 직관적으로 자명한 것이나 증명이 어려운 사실은 그냥 사실로 받아들이기로 하면 많은 직관적인 사실들을 공부할 수 있다. 이는 마치 중, 고등학교에서 실수를 제대로 정의하지 않고도 계산을 습득하는데 문제가 없는 것과 같다.

기하학 관련 모델링 수업에서는 다음과 같은 내용을 활용할 수 있다.

1. 보로노이 다이어그램 등을 활용하여 관공서의 위치를 정하는 방법을 토론한다.
2. 여러 조건 아래서 가장 짧은 길을 찾는 방법을 연구한다.
3. 전시관에서 모든 전시품을 감시할 수 있도록 카메라를 배치하는 방법을 찾는다.
4. 사진 자료 데이터에서 서로 이웃한 데이터의 수치적 차이가 물체를 구분하는데 쓰일 수 있는 것에 대해 토론하고 계산한다.

바. 시각화의 예

〈그림 6.3〉과 〈그림 ??〉은 수많은 서로 다른 시각화의 예 가운데 단 한두가지를 뽑은 것에 불과하다. 시각화가 필요한 이유는 차원이 높아서 우리 눈으로 해석할 수 없는 데이터를 해석가능하게 가공하려는 데 있다. 미래세대는 아래와 같은 표현 기법을 자주 사용하게 될 것이며 데이터에 맞는 기법을 잘 찾고 스스로 표현하는 것이 많은 기업 현장에서 보편화될 것이다. 이는 현재 과거의 통계기법을 활용해 얻은 결과를 여러 종류 도표로 나타내는 것과 유사하다. 하지만 과거의 데이터는 낮은 차원의 대량의 데이터여서 기존의 기법으로 시각적 표현이 용이했다. 그러나 미래의 데이터는 차원은 높고 데이터의 양은 상대적으로 적어서 (이런 것을 빅데이터라 함) 이를 시각화하는 것은 난해한 수학을 동원해야 한다.

3) 산업수학에 적합한 수학 학습 내용으로서의 통계학과 데이터과학

가. 통계학의 발전

확률이 현실에 적용되기 시작한 것은 비교적 오래 되었다. 적어도 16세기에 카르다노가 확률의 개념을 가지고 있었고 17세기에는 페르마와 파스칼이 체계적으로 이를 논의했으며 확률에 대한 책을 하위헌스가 썼다. 르장드르가 최소제곱법을 처음 설명한 것은 19세기 초였고, 데이터에 처음 현대적 확률 이론을 적용한 것도 19세기에 들어서서였다.

통계학은 현실의 데이터에서 의미를 찾아내는 학문이다. 우리가 현실의 완벽한 데이터를 다 알아낼 방법은 없으므로 일부분의 데이터에서 전체에 대한 정보를 뽑아내야 하고 따라서 일정부분 불확실성이 개입될 수밖에 없다. 이 불확실성을 확률로 처리하는 것이 기존의 통계학이라 할 수 있다. 이런 통계학은 19세기 후반에 수학적 도구를 찾아냈고 20세기에 들어서 확실한 논리적 기반을 마련하였다. 그리고 지난 20년 동안 발전한 데이터를 다루는 새로운 기법들은 지금의 정보통신 기술과 결합하여 또다시 새로운 전기를 맞고 있다. 따라서 통계학 및 데이터과학은 세 번째 전기를 맞고 있다고 할 수 있다.

나. 최근 데이터과학의 발전

현재 진행되고 있는 데이터과학에서의 변화는 두 가지 특징을 가지고 있다. 그 하나는 데이터를 다루는 방법에서 확률만이 아니라 수학의 여러 분야 이론이 적극적으로 활용되기 시작했다는 것이다. 요즘의 컴퓨터는 계산이 매우 빨라서 예전에는 불가능했던 계산이 가능해졌기 때문이다. 이런 컴퓨터로도 불가능한 것은

개체의 데이터의 차원이 높은 경우이다. 이런 데이터에 대하여는 통계적 이론이 전무한 상태여서 다양한 수학 이론을 적용하려 시도하고 있으며 또 새로운 이론을 개발하고 있다. 다른 하나는 단순한 알고리즘을 다면적으로 반복 적용하여 불가능한 문제를 해결하는 방법이 개발되었다. 바둑에서 알파고라는 프로그램으로 세간의 이목을 집중시킨 이 방법은 기계학습에서 시작되었다. 이런 방법이 재미있는 것은 수학적 이론의 바탕 없이 문제 해결 방안을 찾고 있다는 것이다. 수학적 이론이 없다는 것은 문제 해결이 되어도 그 원리를 알지 못한다는 것이다. 이에 따라 미래의 데이터과학은 이런 새로운 방법을 많이 창안하는 것과 함께 이런 방법과 수학적 이론의 간극을 메우는 것에 집중될 것이다.

다. 미래 세대의 과제

미래 세대가 다루게 될 큰 대상은 데이터이다. 이것은 학술적 데이터에서 일상 데이터까지, 공공적이고 개방적 데이터에서 개인적 데이터까지 광범위한 것이다. 따라서 미래 세대의 모든 구성원은 항상 일정 부분 데이터를 다루며 살게 될 것이다. 따라서 이를 다루는 기술과 이를 분석한 결과를 판독할 능력이 필요하다. 이의 상당부분은 결국은 자동화 되겠지만 이 데이터 분석이 개개인의 경쟁력이 될 가능성이 크며, 이것은 데이터 전문 분야에서만이 아니라 일상생활에서도 그렇게 될 것이다. 마치 지금 스마트폰을 얼마나 잘 사용하는가가 생활의 질을 결정하는 것과 비슷할 것이다.

따라서 미래 세대는 단순히 자동화된 일반 도구만을 사용하지 않고 조금 더 전문적인 도구와 그 도구가 제공하는 정보를 해독하려 노력할 것이다. 계속해서 급속히 변하면서 발전하는 이런 도구를 뒤쫓아 방법을 습득하고 해독 능력을 키우는 것은 완전히 새로운 종류의 학습 능력을 필요로 할 것이다. 그리고 이것은 자신의 전공분야나 직업과 무관한 일이 될 가능성이 높다.

미래 세대는 적어도 주어진 데이터를 보고 어떤 도구를 활용할 수 있는지를 판단할 수 있어야 하며 이런 방법을 설명하는 매뉴얼을 보면서 재빠르게 그 특징들을 이해할 수 있어야 할 것이다. 아마도 그 이후의 계산은 컴퓨터가 모두 대행해 줄 것이며 그 결과를 다양하게 제공할 것임에 틀림 없다. 따라서 개개인에게 필요한 능력은 적절한 도구를 선택하는 것, 그리고 결과로 제공된 정보의 내용을 이해해서 자신의 문제에 적용하는 것이다. 미래의 도구가 계산해서 제공해 주는 정보는 현재보다 훨씬 복잡한 형태를 띄고 있거나 아니면 형태는 간단해 보여도 그 정보의 의미가 정교하고 미묘한 차이를 다룰 수 있으며 이를 이해하는 것이 고도의 정신적 작업을 요구하는

것일 수 있다.

이런 능력을 가지려면 미래 세대를 위한 수리과학 교육은 적어도 수학적 사고력과 컴퓨터를 사용한 고급 계산 능력 그리고 이 두 가지를 데이터 과학에 자유로이 적용할 수 있는 능력을 갖춰야 할 것이다. 그리고 이런 능력은 모든 개개인이 일정 정도 필요로 하는 것이 된다고 본다. 따라서 이 세 가지를 완전히 별개로 학습하는 것은 효율이 매우 떨어질 것이다. 이와 관련하여 미국학술원의 보고서[8] (2010, 46쪽)는 컴퓨터를 수학적 및 과학적 사고와 함께 사용하여야 하는 대상은 우리 사회의 모든 구성원이라고 제안하고 있으며, 이 모든 구성원의 의미를 최소한으로 잡아도 적어도 대학을 졸업하는 학생 전체를 포함한다고 하였다. 또 동 보고서 62쪽에서 이런 학습에 효율을 높이려면 이들을 각각 학습하기보다는 대상과목(내용)과 도구과목(방법)이 융합하는 것이 좋다는 연구 결과를 다수 들고 있다.

최근의 데이터과학이나 기계학습, 인공지능 모델을 이해하는 가장 기본은 공간을 구분 짓는 고차원 곡면들이며 이에 대한 개념을 제대로 세우려면 고차원 곡면들의 일반 형태와 이들이 만나서 만드는 도형의 여러 가지 특징에 대한 공간 개념을 눈으로 볼(visualize) 수 있어야 한다. 이런 능력은 어려서부터 공간지각력을 훈련하는 방법 밖에는 없다. 즉 도형의 방정식과 이들이 만드는 영역에 대하여 어느 정도의 계산력과 함께 이를 시각적으로도 잘 알 수 있도록 하는 새로운 학습 모형이 필요하다. 당연히 이런 학습의 성취도는 단순한 문제풀이식 시험으로 측정할 수 없으며 대형 문제 풀이식 프로젝트 기반 학습(project based learning)과 같은 방식과 이를 통한 평가를 조기에 도입할 필요가 있다.

중등교육에서 데이터의 분석에 관련된 모델링 학습은 행렬과 연계된 문제를 통해서 쉽게 접근이 가능하며 다음과 같은 예를 들 수 있다.

1. GPS의 원리를 활용해서 위치를 파악하는 문제
2. 연결망의 조건을 일차방정식으로 나타내 보고 이를 활용하는 문제
3. 데이터에 가장 잘 맞는 1차함수를 찾아보고 최소제곱법 문제로 모델링해 보기
4. 디지털 사진 자료를 행렬로 나타내보고 이를 간단하게 바꾸는 방법들을 토론하고 활용하기

[8]National Research Council (2010). Report of a Workshop on the Scope and Nature of Computational Thinking.

4) 산업수학에 적합한 수학학습 내용으로서의 모델링

가. 현실 문제와 모델링

현대는 산업에 수학이 적극적으로 개입되는 사회가 되었으며 모든 분야의 문제들이 수학적으로 해결되는 시기이다. 이런 상황에서 필요한 능력은 인류가 마주치는 문제를 계량적 문제로 재구성하는 것이다. 여기서 계량적이라 하면 단순히 수치적 계산문제만을 뜻하지 않으며 문자 계산 또는 시각적 개념을 활용한 계산 문제 등 광범위한 수리과학적 문제를 뜻한다. 즉 일상언어를 사용해서 표현된 문제를 수리과학적 방법론을 통해서 해결할 수 있는 문제들로 바꾸는 것이다. 이것을 통칭해서 수학적 모델링이라고 부른다.

이제까지 과학 기술 및 산업 전반에서는 단순히 한 가지 이론에 밝은 것으로는 부족함을 모든 전문가들이 말하고 있으며 가장 중요한 것으로 여러 분야가 융합된 방법으로 문제를 해결하는 것을 이야기한다. 이 방법에서 가장 중요한 점은 융합의 핵심에 항상 수리과학이 있다는 것이다. 수리과학이 하는 일은 형식적으로는 정해져 있다. 첫째는 문제 해결과 관련된 수학적 방법론을 선택하고 개발하는 것이다. 둘째는 문제 해결에 필요한 각종 자료를 모으는 것이며 특히 수치적 자료가 중요해진다. 그리고 이들을 사용해서 문제를 수학적 모델(수학적 문제)로 변환하여 이를 해결하고 여기서 얻은 답을 우리가 이해할 수 있는 언어로 변환해서 해석하는 것이다. 이 과정이 정확히 수학적 모델링의 도식이다.

COMAP에서 출간된 수학적 모델링 교과서 중의 하나에는 위의 도식과 함께 다음 4가지 스텝이 적시되어 있다.[9]

1. 문제의 목표를 알아내고 문제의 전반적 형태를 파악한다.
2. 이 문제에서 모델을 만들 때 필요한 변수와 문제의 조건을 파악하여 수학적으로 간단히 한다.
3. 수학적으로 파악된 문제로부터 모델을 만든다(모델은 그래프, 테이블, 방정식 등 다양할 수 있다.). 이 모델 문제를 분석한다.
4. 계산하고, 해설을 붙인다: 이 과정에서 필요하면 앞의 모델을 수정하여 더 적합한 모델로 바꾼다. 앞에서 얻은 결론은 모델에 대한 결론이다. 데이터와 비교하여 이 결과가 의미있는 결과인가 확인하고 이 결과를 문제의 내용에 맞게 변환하여 해설한다.

[9] COMAP, Precalculus: Modeling Our World (p. 19), W. H. Freeman and Co., New York, 2002.

이 내용은 학생들에게 이 말을 가르치고자 하는 것이 아니다. 선생님이 이 도식을 이해하고 문제마다 이 도식에 맞추어갈 수 있도록 학생들의 생각하는 방향에 조언하고 이끌어서 이런 도식을 저절로 알 수 있도록 하고자 하는 것이다.

나. 모델링 수업에서 주의할 점

모델링 수업에서 주의할 것은 모델링하는 현실적 문제 중에 수업에서 특별히 꼭 이루어야 하는 정해진 소재는 없다는 것이다. 다양한 적용가능한 문제들 중에서 적합한 것을 골라 사용하면 된다. 수업에서 그 문제의 현실적 내용을 파악하는 연습을 하지만 그 현실적 내용을 기억해서 다른 경우에 사용하고 싶은 것이 아니다. 우리는 방법을 공부하는 것이지 그 대상 내용을 공부하는 것이 아니기 때문이다.

또 하나 주의할 점은 모델링 수업에서 문제를 모델링하다 보면 아직 잘 모르는 방법을 사용해야 할 경우가 생긴다. 모델링을 잘 하면 이것을 피해나갈 수 있지만 학생들은 이런 사실을 모른 채로 문제를 다루게 된다. 이때 선생님이 지도할 수 있는 방향은 두 가지다.

첫째는 적절히 문제를 바꾸면 해결할 수 있는 문제가 된다는 것을 발견할 수 있게 여러 부수적 문제를 제시하는 것이다. 예를 들어 문제의 모델링 단계에서 찾은 함수로 만든 방정식이 2차방정식인데 아직 2차방정식을 잘 다룰 줄 모른다면 모델링에서 찾은 함수 대신 적절히 다른 것에서 1차함수로 바꿔 생각할 수 있음을 알려줄 수 있다. 몇 가지 가능한 함수들을 모델에서 보여주고 어떤 것을 사용하는 것이 좋을지 토론해 보는 방법도 좋다(보통 1차함수로 바꾸면 모델의 정확도는 떨어질 수 있다. 득실을 논하는 것은 중요하다.).

둘째는 마주친 어려움을 학생들은 아직 모르는 기법을 가지고 해결할 수 있음을 알려주고 이 부분은 이 기법에 맡겨버려도 된다는 것을 알려준다. 예를 들어 모델링은 잘 됐는데 이 중간에 많은 계산이 들어간다면, 여기서 필요한 계산을 컴퓨터 프로그램이 대신해 줄 수 있음을 알려주고 이 부분의 노력은 관련 전공 선생님이 대신해 준다. 현실 문제에서 모델링 중간에 다른 전공의 전문적 지식이 필요할 때가 있다. 이런 지식은 타전공 전문가에게 맡기고 그들과의 의사소통으로 대체할 수 있음을 배우는 것이다. 이를 통해서 협업의 중요함과 융합적 사고가 필요함을 배울 수 있다.

따라서 모델링의 소재를 너무 쉬운 문제로 국한시킬 필요가 없다. 원칙적으로 고등학교 수학을 알면 너무 테크니컬하지만 않으면 현장의 거의 대부분의 문제를 일정부분 해결할 수 있다. 모델링 수업의 소재는 너무 다양하게 널려 있다. 많은

좋은 소재들을 교육 현장에서 활용하려면 이를 쉽게 다시 모델링한 정형화된 소재를 많이 만들어야 한다. 이것은 관련 기관에서 시간을 들여서 개발해야 한다. 이 과정에서 현장의 문제를 지속적으로 모으는 창구를 마련할 필요가 있다. 지금 이 연구가 목표로하고 있는 10년-30년 후에 필요한 내용들은 계속 바뀌게 되며 수학적 방법론도 바뀌게 될 것이므로 지속적으로 연구하고 수정하며 만들어 쌓아나갈 필요가 있다.

마지막으로 이런 과정은 지금까지 우리나라 교육방식과는 전혀 다른 방식이다. 따라서 곧바로 교육과정에 전체를 적용하면 선생님들이 감당할 수 없다. 적어도 지금부터 배출되는 선생님은 이런 수업에 숙달되어야 하며 특히 각 분야 전문가를 초빙해서 함께 수업할 수 있는 준비가 되어야 한다. 그래서 10년 또는 그 이상에 걸쳐서 단계적으로 이런 수업을 늘려가야 한다. 교육의 역사는 단기간에 개혁해서 역효과를 본 경험을 많이 가지고 있다. 1950년대 미국의 신수학이 대표적인 것으로, 이런 잘못을 되풀이하면 안 된다.

다. 21세기의 수학과 산업

20세기의 산업에서 수학이 관련된 문제는 단순한 수학 문제로 변환되는 종류에 국한되어 있었고 특히 단순반복적인 수치계산으로 해결되는 문제만 다룰 수 있었다. 그러나 컴퓨터 계산력의 급격한 상승에 따라 전혀 다른 수준의 문제를 다룰 수 있게 되었다. 이에 따라 예전의 계산방식을 탈피한 새로운 문제를 다룰 수 있게 되었으며, 현대 산업이 제기한 많은 문제들을 현대수학 전반에 걸친 기법을 활용해서 문제를 해결할 수 있는 시대에 접어들었다. 지난 10년을 돌아보면 매우 다양한 문제에 수학이 해법을 제공하였다. 의학에서는 tomography 기법을 활용해서 인체 내부를 입체적으로 촬영할 수 있게 되었다. 여기에는 최신 수학인 역문제 해법이 사용된다. 암호와 관련된 수학, 경제와 관련된 수학, 영화 등의 영상을 디자인하는 수학, 위성사진을 기계가 분석하도록 하는 수학 등은 모두 현대의 첨단수학들이고 이미 현장에서 사용되고 있다.

현재의 수학자들의 분석에 의하면 이 밖에 많은 분야에서 수학이 활용되고 있으며 그 내용은 급속도로 확산되고 있다고 한다. 최근에 프린스턴대학 출판사에서 발간된 The Princeton Companion to Applied Mathematics(Higham, 2015)는 현대 응용수학의 정수를 설명하고 있다. 이를 보면 대단히 많은 공학과 산업 기술 문제에 수학이 활용되고 있음을 알 수 있다. 활용되는 수학에는 100년이 넘은 수학부터 최근 20년 사이에 개발된 신 수학 이론까지 다양하다. 수학이 이렇게 폭넓게 그리고 수준높게

응용된 것은 역사상 전례가 없는 것이다. 그리고 예전에는 이 모든 것의 앞에는 과학 연구의 발전이 바탕이었다. 그러나 제4차 산업 시대에는 산업계 문제에 직접 수학이 활용되게 되었다.

라. 미래의 교육에서 모델링의 역할

미래세대가 수학적 모델링 기법을 알아야 한다는 것은 어찌 보면 당연하다. 그리고 이것은 몇몇 특수한 전문가에게만 필요한 것이 아니라 일상적인 많은 상황에서 이런 기법을 활용하면 상황을 잘 이해할 수 있게 될 것이다. 현재의 지엽적 단순계산 문제는 대부분 컴퓨터가 대체하게 되므로, 미래의 학생들은 이런 문제를 다룰 필요는 현저히 줄어드는 반면 모델링을 활용하는 기법을 일찌기 공부할 필요가 있다. 학교 수학에서는 기초적인 계산법, 즉 미적분을 학습하기 전 단계인 중학교에서도 다항식 계산과 초보적인 세기(헤아리기)를 활용하여 충분히 많은 현실적 문제를 모델링하는 경험을 하고 모델링 기법을 익히게 할 수 있다. 문제를 활용한 학습(problem-based learning)과 프로젝트 기반 학습(project-based learning)등을 활용하면 모델링과 공동작업에서의 의사소통 문제 등을 한꺼번에 배울 수 있다.

한편 이런 학습은 모든 수학학습을 대체하지 못한다. 비록 모델링학습이 구성주의적이고 발견적 학습에 좋은 소재가 되지만 이것만으로는 시간효율이 너무 떨어지는 등의 단점도 매우 많다. 즉 현재식의 계산법 트레이닝을 중심으로 한 기존 방식의 학습과 병행하고 융합되어야 한다. 현재에는 이런 교육 내용을 문제와 적절히 배합한 교과서도 나와 있다.

따라서 미래세대는 계산의 기법보다는 계산의 원리를 이해하는 것이 중요하고 이는 원칙적이고 논리적인 엄밀한 수학 학습을 통해 가능하다. 한편 이를 현장에 활용하는 것은 모델링을 통해 가능하며 이 과정에서 부족한 계산력을 컴퓨터의 계산력을 통해서 해결해야 한다. 이것이 미국 미래보고서(제 3장 제 1절 참조)에서 수학, 통계, 계산과학이 통합되어야 한다고 주장하는 이유이다.

마. 산업수학에 적합한 모델링 학습 내용

현재 다양하게 활용되는 순수수학 이론은 정수론, 선형대수학, 조합론, 암호론, 위상수학, 확률론, 통계학, 미분방정식, 해석학, 기하학 등 수학의 분야 가운데 응용되지 않는 분야가 없다고 하겠다. 이 뜻은 미래세대는 지금보다 훨씬 많은 수학을 알아야 한다는 것이다.

미래세대는 이런 수학을 어떻게 알 수 있을지는 현재의 수학 공부를 보면 답이 있다. 지금부터 50년 전에 공부한 사람들은 지금보다 훨씬 적은 양의 수학을 공부하는 데도 많은 시간을 들였다. 그 이유 중에 수학교육 기법이 좋아진 것도 있겠지만 이보다 현대에는 수학을 사용하는 기술 가운데 많은 것을 예전보다 덜익히는 데 있다고 본다. 예를 들면 학생들의 단순한 숫자 계산 능력은 50년 전에 비해서 많이 떨어진다. 예전에는 암산과 주산 같은 것에 많은 시간을 할애하였지만 지금은 이런 계산이 필요하면 계산기나 계산 앱을 사용하게 되었다.

미래세대도 마찬가지로 지금의 수학 이론 가운데 복잡하기만 한 이론이나 수학적 계산 결과는 컴퓨터 앱이나 사전 등을 통해서 많은 수고 없이 사용할 수 있게 될 것이다. 이 대신 훨씬 많은 이론을 이해하고 사용할 수 있을 것이다. 우리 수학이 발전한 것도 개별적인 계산을 외우지 않고 보편적이고 깊이있는 이론으로 대체해서 공부 시간을 줄인 것처럼 미래세대도 개개의 이론의 세부사항을 이해하고 기억하기보다는 복합적 문제 해결에 새로운 도구를 활용해 보면서 도구적 이론의 모습과 용도를 파악해 나가는 식으로 그 양상이 바뀌게 될 것이라고 예측된다. 또한, 그렇게 감당할 수 없는 부분은 여러 사람의 공동작업으로 대체될 것이다. 즉 미래세대는 지금보다 크고 더 현실적인 문제를 다루고 공동작업을 통하며 이것을 해결한다고 본다. 따라서 그들이 가져야 할 능력은 모델링 기법이 들어가는 문제이고 다양한 인재들 사이의 의사소통이 중요한 덕목 가운데 하나가 될 것이다.

일반적으로 고등학교 다항식 계산까지 수학을 배경으로 탐구해 볼 수 있는 수준의 모델링 문제는 많다. 예를 들어 다음과 같은 것을 들 수 있다.

1. 주어진 데이터에서 최적 찾기
2. 강도를 측정하고 이를 비교하기
3. 낙하하는 물체에서 위치 데이터를 측정하고 운동을 식으로 표현하기
4. 화학 반응식의 계수 맞추기
5. 주기적으로 일어나는 현상을 측정하고 계차수열 등을 활용하여 예측하기
6. 기하학적 방법으로 위치를 측정하기
7. 상대적 위치를 측정하고 표현하기
8. 원료의 수급과 상품의 공급 등을 행렬 형태로 나타내기
9. 현실적으로 매우 큰 원호에서 중심 찾기 등의 기하학적 모델링
10. 복권이나 추첨에서 당첨될 가능성을 계산하는 문제

5) 산업수학에 적합한 수학학습 내용으로서의 컴퓨터 활용(미국 학술원 보고서(NRC, 2010)를 중심으로)

가. 20세기의 컴퓨터 발전

인류는 오랜 동안 계산을 위해여 도구를 개발하여 활용하였다. 이미 2000년이 훨씬 넘은 동양의 산가지는 고대의 컴퓨터였다고 생각할 수 있으며 서양에서도 여러 종류의 계산 기계를 발명하였다. 이런 기계 계산이 전기 회로를 활용한 전자계산으로 넘어온 것은 1943년 경으로 영국의 원조적 Colossusy를 거쳐서 미국의 ENIAC에서였다.

이러한 컴퓨터는 다시 한 번 트랜지스터의 발명을 거치고 다시 집적회로(IC)의 발명을 지나서 오늘날의 칩(chip)을 바탕으로 한 컴퓨터가 되었다. 이 과정에서 컴퓨터를 제어하는 많은 프로그램이 만들어지고 그 계층도 여럿으로 나뉘어서 컴퓨터만 알아듣는 언어에서 많은 사람들이 사용함에 어려움이 없는 사용자 친화적(user-friendly)인 많은 프로그램까지 다양하게 되었다. 최근의 혁신은 스마트폰의 발명으로 들고다니며 아무데서나 쓸 수 있는 고급 기능의 컴퓨터를 모든 사람들이 사용하는 시대가 되었다.

나. 수학계에서의 컴퓨팅

수학은 계산의 학문이다. 지난 한 세기가 추상적 고급 수학의 세기라고 하더라도 그 내용의 대부분은 그 이전세기의 계산 수학을 포괄적으로 포함하는 것이라서 난해하기는 하지만 더 범 수학적인 계산법이라고 할 수도 있다. 이런 수학은 기계를 사용한 계산이라는 새로운 도구를 만나서 계산법의 새로운 지평을 열었고 현대 사회의 모습을 이렇게 바꾸어 놓았다.

현재 수학계에서 보는 컴퓨터는 두 가지 모습이다. 하나는 특별한 수학 이론에 맞는 다량의 고급 계산을 하기 위한 특별한 프로그램을 짜거나 사용하는 것이고, 또 다른 하나는 수학 전반에 나타나는 모든 계산을 대신해 주는 범용 수학 프로그램을 사용하는 것이다. 앞의 경우에는 컴퓨터를 사용해서 특별한 목적에 맞는 코딩을 하기도 하고 특수목적으로 개발된 프로그램을 사용해서 특수한 목적의 계산만 하는 경우이다. 20여년 전쯤 위상수학의 특수한 불변량을 계산하기 위한 프로그램을 개발한 것이 고급 순수수학의 첫번째 예라고 할 수 있겠으며 이후 암호론에 관련된 정수론 관련 프로그램이 그 뒤를 이었다.

20여년 전에 만들어진 전문적 범용 수학 프로그램인 Mathematica를 시발점으로 해서 거의 동시에 여러 가지 범용 프로그램이 개발되었으며 현재 서너가지가 중요한

위치를 가지고 있다. 이에는 Mathematica 외에 수리 및 공학 전반에 사용되는 Matlab과 일반적 용도이며 교육계에서 폭넓게 사용되는 무료 프로그램 Geogebra가 있다. 이런 상황은 당분간 이어지겠지만 5년 내지 10년이면 지금은 전혀 예상하지 못한 프로그램도 개발될지 모른다.

최근의 수학계는 교육과 연구의 많은 분야에서 컴퓨터를 활용한다. 단순히 워드나 스케쥴러, 성적처리 등의 용도로 쓰는 것은 제외하고도 교육과 연구의 내용에 컴퓨터는 광범위하게 쓰인다. 이미 20여년 전부터 시작된 이런 경향은 시간이 가면서 많은 수학 분야에서 사람이 손으로 할 수 없는 계산, 또는 너무 시간이 많이 걸리는 계산, 복잡한 문자식의 계산, 정확한 그림이 필요할 때 등등에 컴퓨터 활용이 기하급수적으로 늘어났다. 최근에는 수학 연구에서 컴퓨터를 제외할 방법은 없다고 하겠다.

다. 컴퓨터 과학과 교육에서의 관점

컴퓨터 과학은 20세기 말부터 정보혁명(information revolution)이 시작됨에 따라 이 교육에 많은 노력을 기울였다. 중등교육에서 컴퓨터를 공부하는 목적은 계산에 꼭 필요한 개념을 세워주려는 것이며, 대학에서는 개개인의 일생동안 진화하는 계산 개념과 기술을 지속적으로 습득할 수 있게 해 주려는 것이라고 한다. 그러나 최근에 사회가 변화함에 따라 위와 같은 기존의 관점은 계산이 무엇인가 하는 기초적 개념까지는 가르치지 못하고 있다는 반성을 하고 있다.

이에 따라 컴퓨터 과학계에서는 현재의 교육 방향을 컴퓨터 사용 능력, 프로그래밍 능력, 응용프로그램 사용 능력 등을 높여주려는 것으로 보고 있으며, 이런 능력의 고양은 개개인이 문제를 해결하는 데 도움을 주고, 시스템을 고안해 만들고, 인간 행동을 이해하는 등에 활용될 것으로 내다보고 있다. 여기서는 컴퓨터를 활용할 수 있는 능력은 수학이나 언어, 논리 등을 활용할 수 있는 능력과 동등한 수준의 능력이라고 본다. 컴퓨터 과학계에서는 이런 능력을 통틀어서 계산적 사고(Computational Thinking)라는 이름을 붙였다. 이 이름을 처음 사용한 것은 MIT의 수학자 Papert이며 최근에 교육계의 화두가 되고 있다.[10]

라. 미국 학술원의 보고서

이와 관련해서 2010년에 미국학술원(National Academies)의 NRC(National Research Council) 산하 공학 및 물리과학 분과의 ‘컴퓨터과학 및 통신공학 위원회

[10] https://en.wikipedia.org/wiki/Computational_thinking

(Computer Science and Telecommunication Board)’가 계산적 사고에 대한 보고서를 냈다. 이 보고서는 사회와 산업에서 컴퓨터의 역할이 급격하게 변하는 시점에서 시기적절한 토론에 대한 보고였으며 이런 시대에는 계산적 사고를 어떻게 가르쳐야 하는가를 논의하기 위한 토론회였다.[11] 이 보고서에서 간과하지 않아야 할 점은 이 보고서를 작성한 중심인물들이 수학자가 아닌 컴퓨터 과학자들이라는 것이다.

그들은 계산적 사고라는 능력이 필요한 이유로 다음과 같은 것을 들고 있다:

(1) 기술사회에서 성공하기 위해서
(2) 정보기술 직업에 대한 일반인의 관심 증가
(3) 미국의 경제의 경쟁력을 높이고 유지하기 위해서
(4) 다른 전문 분야에서 제기되는 문제를 해결하기 위해서
(5) 개개인이 하는 일의 효율성을 높이기 위해서 등이다.

이 보고서의 상당부분은 ‘계산적 사고’가 무엇인가를 정의하려는 시도에 할애되고 있다. 토론에 참여한 위원들은 대부분 유수한 대학의 컴퓨터 관련 학과의 교수였으며 위원장은 UC Berkeley 대학원 교육학과에서 수학, 과학 및 기술 교육을 전공하는 교수이다. 그들이 토론회의 시작에서 제기한 문제들을 살펴보면 다음과 같다.

- 계산적 사고의 영역 범위와 그 본질은 무엇인가?
- 계산적 사고는 수학적 사고, 정량적 사고, 과학적 사고 또는 정보기술에의 능숙도 등과는 어떻게 다른가?
- 어떤 종류의 문제들이 계산적 사고를 필요로 하는가?
- 계산적 사고는 이를 사용하는 분야에 따라 어떤 식으로 달라지는가?
- 과학자가 아닌 사람들에게 계산적 사고는 어떤 가치가 있는가?
- 계산적 사고를 단련할 수 있는 시설이 광범위해지면 일반 노동자들의 생산성을 얼마나 높일 수 있는가?
- 새로운 기술은 계산적 사고에 활용될 수 있는 시설의 질을 얼마나 높일 수 있는가?
- 계산적 사고 기능을 키워주는데서 정보기술의 역할은 무엇인가?
- 컴퓨터를 사용하지 않고 배우고 가르칠 수 있는 계산적 사고의 영역은 어떤 것인가?

[11] Report of a Workshop on the Scope and Nature of Computational Thinking, National Academies Press, 2010.

- 또 컴퓨터 프로그래밍(코딩) 능력이 없어도 배우고 가르칠 수 있는 계산적 사고의 영역은 어떤 것인가?

이런 질문을 보면 이들이 논하는 ‘계산적 사고’는 매우 광범위한 개념이라는 것을 알 수 있다. 그리고 이 개념은 아직 정립되지 않은 발생 단계의 개념이라는 것도 알 수 있다.

마. 계산적 사고

이 보고서에서 정의하려 시도한 계산적 사고의 개념은 다음과 같다.

1. 대상을 다루는 과정의 사고방법을 말한다.
2. 인간의 정신적 사고 과정을 흉내내서 기계화 또는 알고리즘화 하는 것이다.
3. 계산과 관련된 기호체계를 사용하는 방법: 이를 써서 구체적 지식을 표현하고, 암묵적 지식(언어로 표현되기 어려운 지식, tacit knowledge)을 객관화하고, 이런 지식을 계산가능한 형태로 바꾸고 처리하며, 이렇게 생산된 정보를 관리한다.
4. 수행해야 할 과제와 관련된다.
5. 과학과 공학 사이의 다리 역할을 한다.
6. 문제 해결 과정을 추상화한 것이다.
7. 일종의 언어라고 봐야 한다.
8. 추상화된 과정을 자동화한 것이다.
9. 컴퓨터를 인지를 위한 도구로 사용하는 것이다.

이러한 여러 가지 시도를 자세히 살펴보면 수학적 사고, 과학적 사고 등과의 차별을 시도하고 있지만 컴퓨터를 활용한 계산을 도입한 것을 빼고는 큰 차이를 알아보기 힘들다. 특히 알고리즘을 활용하는 방법이라고 하는 부분은 실제로 수학의 ‘이산수학’이 다루고 있고 교육하려는 것과 거의 동일한 관점이다.

바. 혼동되고 있는 개념

이 보고서에서 가장 특징적인 부분은 ‘계산적 사고’를 정의하는 과정에서 ‘계산적 사고를 정의하는 것보다 어떤 것이 계산적 사고가 아닌지를 말하는 것이 더 나은 점이 있다’고 지적한 부분이다. 이에 따라 이 보고서(NRC, 2010)의 28쪽에는 이러한 논의가 있다. 본 토론에 참석한 여러 위원들이 지적한 바는 대체적으로 다음과 같다.

• 컴퓨터를 잘 활용하는 능력은 계산적 사고력과는 별 상관이 없다. 즉 인터넷 사이트에 접속하는 정도를 넘어서는 컴퓨터 활용 능력이 없어도 계산적 사고를 잘 활용할 수 있다.
• 계산적 사고는 컴퓨터 과학과 동등한 것이 아니다.
• 계산적 사고는 정보기술에 능숙한 것과는 다르다.

이런 관점은 카네기멜론대학의 전산학과 교수 Wing 교수가 설명한 계산적 사고와 일맥상통한다. 그는 계산적 사고는 어떤 것인가를 설명하면서 다음과 같이 말했다.[12]

• 사고법이지 프로그래밍이 아니다. (Conceptualizing, not programming.)
• 기초지식이며 기계적 기능이 아니다. (Fundamental, not rote skill.)
• 사람이 생각하는 방법이지 기계가 하는 것이 아니다. (A way that humans, not computers, think.)
• 수학적 사고 및 공학적 사고와 상호보완적이고 연계되어야 한다. (Complements and combines mathematical and engineering thinking.)
• 아이디어이지 인공적으로 가공된 것이 아니다. (Ideas, not artifacts.)
• 모든 사람이 모든 곳에서 사용할 것이다. (For everyone, everywhere.)

다시 강조하는 점은 이런 지적을 한 사람들이 모두 컴퓨터 과학 전공자라는 점이다. 이들의 관점을 보면 계산적 사고를 만들어낸 본래의 목적은 현재 우리나라에서 진행되는 것과 같은 코딩 교육과는 너무나도 다르다는 것을 알 수 있다. 이들이 중요하다고 생각하는 것은 수학적 사고나 과학적 사고와 별로 큰 차이가 나지 않는다는 점임을 쉽게 알아볼 수 있다. 그리고 컴퓨터를 활용하는가에 차이점이 있지만 목표하는 바는 문제해결에서 활용할 수 있는 모델링과 같은 기법에 중심을 두고 많은 부분을 자동화하는 것임을 알 수 있다.

특히 미국 보고서에서 “계산적 사고는 컴퓨터 과학과 동등하지 않다”고 하면서 다음과 같은 예를 들었다.

> “예를 들어 과학적 사고는 사과나 오렌지를 보고 이들이 어떻게 비슷하고 또 서로 다른지를 생각하는 것이고, 수학적 사고는 구면 같은 것을 보면서 넓이나 부피를 생각하고 또 얼마나 높은 차원과 관련되어 있는지를 생각하는 것이다. 이에 비하여 계산적 사고는 몇 명의 사람이 어떻게 사과를 잘라서 나누면 이 사람들이 공정하게 나눴다고 생각할까와 같은 것이다.”

[12] Jeannette M. Wing, “Computational Thinking”, Communications of the ACM, Vol. 49, No. 3, March 2006, pp. 33-35. Computational Thinking: What and Why?, 2010 (**http://www.cs.cmu.edu/~CompThink/resources/TheLinkWing.pdf**).

이 해설은 나름대로 일반인에게 계산적 사고를 이해할 수 있게 한다. 그러나 이런 해설은 조금은 소박한 생각이라 아니할 수 없다. 조금만 깊이있게 과학과 수학을 공부한 사람이라면 이 모든 문제가 거의 유사하고 같은 사고방식을 활용해서 접근해야 한다는 것을 알 것이다. 특히 마지막의 사과를 나누는 문제는 조합론적인 비교 판단 및 의사결정 문제에 불과하다. 즉 미국의 2025 보고서(NRC, 2013)의 제언과 같이 수학, 데이터 과학 및 계산학이 융합되게 되면 수학적 사고, 통계적 사고, 그리고 계산적 사고는 융합되어 한 가지 사고법으로 통일될 것이 자명해 보인다. 그리고 이때 중요한 것은 컴퓨터 과학자들도 이런 사고법을 익히고 활용하는 것이 코딩보다 훨씬 중요한 역할을 할 것이라고 생각한다는 것이다.

사. 미국 National Research Council 관련 보고서들

미국에서 1960년대에 Papert가 LOGO를 만들어서 컴퓨터의 교육을 진작시킬 때부터 이에 관련된 미국학술원의 노력은 다음으로 간단히 요약할 수 있다.

- 1992년 미래를 계산한다 (Computing the Future).
- 1999년 정보기술에 능숙해지기 (Being Fluent with Information Technology).
- 2002년 기술적으로 말하기: 왜 모든 미국인은 기술에 대해 더 알아야 할 필요가 있는가 (Technically Speacking: Why All Americans Need to Know More About Technology).
- 2004년 컴퓨터과학: 이 분야에 대한 생각, 이 분야에서 보는 생각 (Computer Science: Reflections on the Field, Reflections from the Field).
- 2009년 고등학교의 공학 교육: 현황의 이해와 전망의 개선(Engineering in K-12 Education: Understanding the Status and Improving the Prospects).

즉 미국은 상당히 오랜 동안 정보기술과 계산의 교육에 많은 노력을 기울여 왔다는 것을 알 수 있다.

아. 컴퓨터 교육에 대하여

이와 같은 토의와 최근의 연구 결과들을 집약하여 미국 학술원 보고서가 제언한 바는 다음과 같다.

1. 학생들은 직접 컴퓨터에 대해서 공부하지 않더라도 다른 과목을 공부하면서 계산적 사고와 같은 사고 전략을 습득할 수 있다.
2. 선생님은 잘 만들어진 교육과정을 통해서 이런 사고 전략을 가르칠 수 있다.

3. 적절한 안내만을 사용해도 학생들이 독자적으로 이런 사고 전략을 습득하도록 할 수 있다.

4. 그러나 컴퓨터를 활용하면 학생들이 복잡한 문제를 풀거나, 과학적 시각화 방법을 사용하거나, 친구들과 함께 활동하면서 이런 습득 과정을 용이/수월하게 만들 수 있다. 그리고 이런 환경은 구체적인 활동 내용을 통해서 효율성을 높일 수 있다.

앞에서의 모든 내용을 볼 때 여기서 컴퓨터의 활용은 문제 해결 과정에서 보조적인 것임에 틀림 없고, 특히 기초적인 코딩을 사용하는 것은 아님을 확연하게 알 수 있다. 오히려 사용할 수 있는 많은 응용프로그램을 활용하여 활동하는 것이 매우 바람직한 것임을 시사한다고 할 수 있다.

최근의 발전된 수리계산 프로그램을 사용해 보면 코딩을 못해서 사용하는 못하는 것이 아니라 그 프로그램이 가지고 있는 계산함수의 의미를 몰라서 사용하지 못하는 경우가 대부분이다. 미래세대가 이런 수리계산 프로그램을 잘 사용하려면 컴퓨터만이 아니라 사용할 수학 이론과 이것이 응용되는 현실 문제가 요구하는 바를 제대로 파악할 능력이 있는 것이 가장 중요하다.

컴퓨터의 계산력을 활용하는 것은 모든 모델링 문제에서 공통으로 나타나는 현상이다. 특별히 앞에서 소개한 다음과 같은 문제의 모델링은 이런 도구의 능력을 활용할 기회가 많다.

1. 경영과 관련된 문제에 초보적인 그래프 이론과 알고리즘 아이디어를 도입하여 컴퓨터 계산 활용하기

2. 데이터 과학, 통계에서 컴퓨터 계산력을 활용하기

3. 사회적 선택 문제인 스포츠에서 여러 팀이 경기하여 얻은 복잡한 경기 결과에서 누가 가장 잘 했는가를 판단하는 문제 등에서 계산에 도움을 얻기

4. 주민등록번호와 같은 개인확인번호의 원리나 정보를 암호화하는 문제에서 여러 경우를 계산해 보기

5. 대상을 파악하는 가장 초보적인 것으로 모양과 크기, 대칭과 패턴, 반복되는 무늬(타일링) 등을 다루며 컴퓨터 그래픽 활용하기

6. 금융과 자원에 관련된 문제에서 반복적 계산에 컴퓨터 활용하기

제 6 절 산업수학: 초·중등 수학 교육 방안

1) 이산수학

실세계와 수학의 관련성을 보여주는 범위의 것으로, 알고리즘, 그래프이론, 벡터와 행렬, 조합론, 수학적 모델링, 논리와 증명 등을 포함시킬 수 있을 것입니다. 알고리즘은 일상생활에서 부딪치는 단순한 문제에서부터 컴퓨터 프로그램밍까지를 포함할 수 있습니다. 그래프 이론은 이산수학에서 가장 대표적인 주제로, 통신 네트워크, Game of Instant Insanity, 경기대진표, 생산스케줄과 같은 문제 상황을 탐구할 수 있는 기회를 제공하는 것이 좋을 것입니다. 그래프는 행렬에 의해 대수적으로 표현되므로 행렬은 그래프와 함께 다루는 수학적 도구가 됩니다.

조합론에서는 경우의 수를 세는 것을 공식에 의존하는 것이 아닌 경우나누기와 세기 쉬운 집합으로의 일대일대응을 통하여 구하도록 가르쳐야 할 것입니다. 효율적인 경우나누기 능력과 사고의 유연성은 매우 밀접하게 관련지어져 있기 때문에 경우나누기 능력은 사회인이 갖추어야 할 핵심적 역량이라 할 수 있습니다. 경우나누기는 이산수학에서 곱의 법칙과 합의 법칙을 적용할 때 빈번히 일어납니다. 따라서 학생들이 곱의 법칙과 합의 법칙을 적용하여 경우의 수를 구하는 경험을 충분히 하도록 하는 것을 제안합니다. 한편 중복조합은 상자에 공을 넣는 것과 일대일 대응시켜 구하는 것으로 지도하여 공식을 사용하는 것을 지양해야할 것입니다.

논리와 증명은 기하의 주제들을 가지고 지도할 수도 있으나 간단한 구조를 가진 이산수학적 주제들을 가지고 지도할 수도 있습니다.

이상의 주제들과 달리 수학적 모델링은 사고의 범주이므로, 이상의 주제들을 모두 수학적 모델링의 하위범주로 볼 수도 있습니다. 즉, 어떤 상황을 그래프로 표현하고 행렬로 계산하는 등의 수학적 경험을 할 수 있을 것입니다.

좀 더 구체적인 단계적 이산수학 학습을 그래프 이론 중에서 수형도(tree)를 주제로하여 학년별로 제시하여 보겠습니다. 초등학교 4학년에서 꼭지점과 변으로 이루어진 그래프와 경로 개념을 도입하고, 이후에 학년별로 심화시켜서 학습할 수 있습니다.

- 초등 5학년: 수형도를 회로를 갖지 않고 연결되어 있는 그래프로 도입한다. 회로는 4학년에 도입한 경로를 사용하여 시작점과 중간점이 반복되지 않는 시작점과 종착점이 일치하는 경로로 정의한다. 그래프가 연결되어있다는 것은 어떠한 두 꼭지점 사이에 경로가 존재한다는 것으로 정의된다. 이 정의를

따라 학생들이 수형도를 직접 그려보게 한다. 여러 개의 수형도를 그려보면서 공통된 성질을 찾아보도록 한다. 예를 들어 ‘두 꼭지점 사이에 유일한 경로가 존재한다’, ‘꼭지점의 개수가 2개 이상인 수형도에는 차수가 1인 꼭지점이 2개 이상 존재한다’, ‘변의 개수가 꼭지점의 개수보다 한 개 적다’, ‘고리가 아닌 각 변을 삭제하면 더 이상 연결되지 않는다’, ‘이웃하지 않은 두 꼭지점을 변으로 이어주면 회로가 단 한 개 생긴다’와 같은 성질들을 찾아내도록 유도한다.

- 초등 6학년: 그래프의 생성수형도를 그 꼭지점을 모두 포함하는 수형도로 정의하고 모든 그래프가 생성수형도를 갖지는 않음을 관찰한다. 왜 연결된 그래프는 생성수형도를 갖는지 알아본다. 4-cycle과 같은 간단한 구조를 갖는 꼭지점이 구별 가능한 연결된 그래프의 생성수형도의 개수를 구해본다.
- 중등 1학년: 꼭지점의 개수가 2개 이상인 수형도에는 차수가 1인 꼭지점이 2개 이상 존재하는 현상과 수형도의 변의 개수가 꼭지점의 개수보다 한 개 적은 현상을 정당화해보도록 한다. 꼭지점의 개수가 2개 이상인 수형도에는 차수가 1인 꼭지점이 2개 이상 존재하는 것을 보일 때 가장 긴 길이를 갖는 path를 택하는 mathematical instinct를 필요로 한다. 또한 경우나누기가 필요하고 이는 학생들에게 경우나누기 능력을 향상시켜줄 수 있는 좋은 증명이다. 귀류법에 의한 증명도 존재하는데 이도 학생들이 이해할 수 있는 수준이며 논리력 향상에 기여할 수 있다. 수형도에서 차수가 1인 꼭지점을 삭제하면 여전히 수형도를 얻게 되고 꼭지점의 개수가 여전히 2개 이상이면 차수가 1인 꼭지점이 존재하고 그것을 다시 삭제해가다보면 결국은 꼭지점의 개수가 한 개인 수형도를 얻게 된다는 결론을 내리도록 유도하고 꼭지점을 삭제할 때마다 꼭지점 한 개와 변 한 개가 삭제되었으므로 원래 수형도의 꼭지점의 개수가 변의 개수보다 한 개 많음을 결론내리도록 한다.
- 중등 2학년: 다음과 같은 문제를 제시하여 critical path algorithm을 고안하도록 유도한다. 도표 ??은 집을 지을 때 필요한 작업과 소요되는 일수를 나타내는 표이다. 이 때 소요되는 시간을 가장 짧게 하여 집을 지으려고 할 때 작업순서를 정하고 소요일수를 계산하시오.
- 중등 3학년: 다음과 같은 문제를 제시하여 Kruskal의 알고리즘을 고안하도록 유도한다. ‘몇 개의 도시를 연결시켜주는 새로운 도로를 건설하고자 한다. 두 도시를 연결하는 비용은 다르며 경비를 절감하기 위하여 건설된 도로망에 회로가 생기지 않도록 한다. 이 때 최소비용으로 도로를 건설하는 방법은?’
- 고등 1학년: 그래프가 수형도가 되기 위한 필요충분조건이 그래프가 연결되어

있고 꼭지점의 개수가 변의 개수보다 한 개 많은 것임을 증명하여 본다. 또한 그래프가 수형도가 되기 위한 필요충분조건이 그래프에 회로가 없고 꼭지점의 개수가 변의 개수보다 한 개 많은 것임을 증명하여 본다. 이 때, 그래프의 성분이라는 개념이 필요한데 minimally connected subgraph 또는 '두 꼭지점이 연결되어 있다'는 관계를 꼭지점의 집합 위에 도입하고 그것이 동치관계임을 보인 다음 동치류에 의하여 유도된 부분그래프로서 정의할 수 있다. 증명 과정 중에 기호를 적절하게 사용하여야 하므로 기호사용의 유용함을 학생들에게 인지시킬 수 있는 좋은 예이다. 또한 수학적 귀납법에 의하여 증명을 하게 되는데, 현행 교육과정의 수열부분에서 학습하는 수학적 귀납법보다 더 근본적으로 수학적 귀납법을 파악할 수 있게 할 수 있다. 화학에서의 응용으로 포화탄화수소의 구조가 수형도형태임을 증명해본다.

- 고등 2학년: 연결된 그래프에서의 거리 개념을 다룬다. 연결된 그래프에서 두 점 사이의 거리를 정의하고 그래프의 지름과 반지름을 정의한다. 또한 그래프의 센터를 정의하고 수형도의 센터가 한 점 또는 변으로 이어진 두 점으로 이루어져 있음을 보인다. 또한 shortest path algorithm을 다룬다. 꼭지점이 구별가능한 완전그래프의 생성수형도의 개수를 세어주는 Cayley 공식의 증명을 다룬다. 고등 3학년-David Gale의 bridg-it 문제를 다룬다. 먼저 이기는 사람이 이기는 전략을 갖고 있음을 증명할 때 수형도에 대한 심층적인 이해와 높은 수준의 추론능력을 요한다.

수형도 이외에 채색하기(coloring) 주제를 중심으로 학년별로 심화시켜서 제시할 수 있습니다. 주어진 지도를 인접한 나라들이 구분되도록 서로 다른 색으로 칠하여 전체를 칠하는데 필요한 색깔의 개수를 찾는 채색하기 주제는 활동 수준으로 도입할 수도 있고, 자신이 해결하거나 발견한 사실에 대한 비형식적인 논증을 제시할 수도 있습니다. 또한 일반적인 해법을 찾거나 자신이 발견한 사실에 대한 논리적인 증명을 제시하는 등의 여러 가지 수준으로 다룰 수 있습니다. 이것은 그래프 이론의 중요한 주제이면서 동시에 실생활과 밀접하게 관련되어 있어 학생들은 창의적이면서도 논리적인 사고를 정련시켜 나갈 수 있습니다. 끊임없이 변화하는 상황에 대응할 수 있는 능력을 길러주기 위해서는 이산수학 지식을 가지고 실생활에서 이산수학의 역할을 확인하고 이해하는 능력, 현명한 판단을 내리는 능력, 개인의 삶의 요구에 맞도록 수학을 사용하는 능력, 그리고 수학화의 경험을 즐기고 소중하게 생각하는 경향 및 태도를 길러주어야 할 것입니다.

(1) 초중등 수학교육에 넣을 이산수학 관련 내용, 교육 방식

초중등 수학교육에 이산수학을 넣는다면 학생들이 수학에 대해 조금이라도 긍정적이 될 것으로 봅니다. 이산수학에서 다루는 대상들에는 순열이나 그래프처럼 일상에서 자주 관찰되는 것이나 순서, 점화식, 알고리즘 등 직접 체험할 수 있는 것들이 많습니다. 이런 개념들을 활용해서 수학적 능력과 알고리즘 작성 능력을 동시에 배양하게 한다면 효과적입니다.

초등학교에서 이산수학 기본 개념을 가르친다면 두 가지 제안이 있습니다. 첫째, 손으로 만질 수 있는 보조도구를 적극적으로 활용하면 좋습니다. 예를 들면, 순열을 다룰 때는 숫자가 적힌 카드를 학생들이 손에 들고 공부하면 좋을 것입니다. 순열에 대한 문제가 나오면 카드를 가지고 설명하고, 카드를 가지고 생각하고, 카드를 가지고 분류하고, 카드를 가지고 순서대로 정리해 보게 하면 효과적입니다. 그래프라면 일상에서 예를 들어 설명할 수 있습니다. 둘째, 이산수학의 기본 개념은 코딩 교육의 소재로 적격입니다. 이산수학의 기본 개념과 코딩(알고리즘 작성)을 병행해서 가르치면 효율적입니다.

이산수학에서 초중등 학생들에게 가르칠 수 있는 주제어로는 순열, 그래프, 최적화, 랜덤, 그래프, 점화식, 이산 확률 등이 있습니다.

수학교육의 목표는 학생들이 4차 산업사회에 대비해서 부가가치가 높은 일을 할 수 있게 하는 것입니다. 4차 산업사회에서 필요한 인재는 수학적으로 사고하고, 정량적인 분석에 근거해서 정성적으로 판단하고, 여러 현상에서 합리적인 결론을 도출할 수 있어야 합니다.

2) 산업수학 교과서: 금융수학

사회, 기술의 변화에 관계없이 순수수학의 연구는 계속되어야한다.

수학의 다른 측면, 즉 응용에 대해서 논의를 국한해서 생각해보기로 한다.

수학의 응용, 산업수학, 응용수학 등 수학을 실용적으로 활용하기 위해서는 크게 3단계로 나눌 수 있다.

(1) 1 단계: 산업에서 수학이 적용될 수 있는 문제를 선택한다.

현재 금융 산업에서는 높은 수준의 수학 이론들이 응용되고 있다. 실제로, ‘세계 금융의 허브’라고 불리 우는 월스트리트의 많은 인재들은 수학 혹은 물리학을 연구해온 학자들로 구성되어 있다. 금융에서 사용되는 수학 이론의 범위는 넓지만 그 중의 한 예를 정해서 어떠한 수학 이론 등이 그 예에 적용되는지 알아보고, 각

단계에 맞게 설명해보도록 하겠다. 다양한 기초자산으로 이루어진 ELS(Equity-Linked Securities, 주가연계증권) 상품의 가격 결정을 예로 정하였다.

ELS는 2003년에 증권거래법 시행령에 따라 상품화되었다. 출시된 지 10여년 만에 국내 금융시장에서 인기 있는 파생상품이 되었고, 2016년에는 100조원에 가까운 발행규모를 기록하면서 많은 투자자의 수요를 만족시키고 있다. 몇 년 전까지만 해도 ELS 1개 또는 2개의 기초자산으로 이루어져 있었지만, 최근에는 시중 이자율 대비 상대적으로 더 많은 보상을 투자자에게 주기위해 3개 이상의 기초자산으로 이루어진 ELS가 많이 발매되고 있다. 일반적으로 여러 개의 기초자산으로 구성된 ELS의 가격은 평가 일에 모든 기초자산 중 [평가가격/최초기준가격]의 비율이 가장 낮은 기초자산을 바탕으로 산출되기 때문에 기초자산이 많을수록 연 수익률이 높다.

그림 ??은 미래에셋대우증권에서 실제로 판매하고 있는 ELS 16222회 상품이다. 기초자산으로는 Nikkei225-HSCEI-S&P500 지수를 사용하고 연 수익률 7.50% 를 제공하고 원금손실이 가능한 상품이다.[13]

(2) 2 단계: 확률미분방정식 혹은 편미분방정식 등으로 산업문제를 수리모델링 한다.

확률미분방정식: 1973년에 Black-Scholes에 의해 옵션 가격 결정 이론이 소개되었다. Black-Scholes는 기초 자산의 확률과정이 다음과 같은 기하브라운모션(Geometric Brownian Motion)을 모형을 따른다고 가정하였다.

$$\frac{d\,S(t)}{S(t)} = \mu\,dt + \sigma\,dW(t)$$

여기에서 S는 기초 자산인 주가의 확률과정이고, μ는 기초자산의 평균수익률, W는 브라운모션이다. 위험중립원칙 하에서 μ를 무위험 이자율 r로 대체하고, 주가에 자연로그를 취한 $\log S$의 확률과정에 Itô's lemma를 적용하면

$$d\log St = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma\sqrt{dt}\,Z, \quad Z \sim N(0,1)$$

[13]위 그림의 출처는 아래의 상품설명서 주소에서 가져왔으며 더 자세한 ELS 상품에 대한 설명과 구조를 이해하기 위해서는 간이투자설명서 및 투자설명서 주소를 참조하면 된다. 상품설명서: https://www.miraeassetdaewoo.com/public/els_ezon/16222.pdf 간이투자설명서 및 투자설명서(16222): https://www.miraeassetdaewoo.com/public/editor/1480579676474.pdf

를 얻고 이를 $S(t)$에 대해 정리 하면,

$$S(t) = S(0)\exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,Z\right)$$

를 얻는다. 편미분방정식: $V(t, S(t))$를 옵션가격이라 할 때, 위에서 제시한 기초자산 $S(t)$의 확률 과정을 바탕으로 마팅게일, Feynman-Kac 정리 그리고 무차익거래 이론을 적용하면

$$d(V(t,S(t))) = [V_t + rV_x + \frac{1}{2}\sigma^2 V_{xx}]\,dt + \sigma V_x\,dW, \quad dB(t) = r\,dt$$
$$\Rightarrow V_t + rV_x + \frac{1}{2}\sigma^2 V_{xx} - rV = 0$$

를 얻는다. 마지막 줄의 편미분 방정식은 Black-Scholes Partial Differential Equation(PDE)로 잘 알려진 방정식이다.

Black-Scholes는 PDE를 구하여 Vanilla Call 옵션의 해석해까지 제시하였다. 하지만, 현재 금융산업시장에는 ELS 등과 같이 Vanilla 상품보다 훨씬 복잡한 구조화 상품들이 존재하며 이러한 상품들은 해석해가 존재하지 않는 경우가 대부분이다. 이러한 경우에는 수치기법을 적용하여 근사해를 구해야 하는데, 어떤 방법론을 적용하는지에 따라 확률미분방정식 모형 혹은 편미분방정식 모형을 선택한다.

(3) 3 단계: 적절한 수치기법을 적용하여 수리모델링에 대한 근사해를 구한다.

3.1 몬테카를로 방법(Monte Carlo Simulation)

몬테카를로 방법은 확률미분방정식 모형을 적용하여 문제를 해결하는 방법론이다.

$$d\log S(t) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma\sqrt{dt}, \quad Z \sim N(0,1)$$

를 이산모형으로 변환 하면 다음을 얻는다.

$$\log\left(\frac{S(t+\Delta t)}{S(t)}\right) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,Z,$$
$$S(t+\Delta t) + S(t)\exp\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,Z$$

몬테카를로 방법은 이산모형을 통해서 난수를 발생시켜 시뮬레이션을 여러 번 반복한 후 기댓값(평균)을 구하고 현재 가격으로 할인해서 가격을 결정하는 방법론이다.

2개 이상의 기초자산으로 구성된 ELS 상품에는 각 기초자산간의 상관관계가 존재한다. 이 때에는 난수를 발생시킬 때 상관관계를 반영한 난수를 발생시켜야 하는데 이때 사용되는 이론은 촐레스키분해라고 알려진 선형대수이론이다.

기초 자산이 3개인 ELS의 가격을 결정할 때에는 서로 독립인 난수열 Z_{1,t_n}, Z_{2,t_n}, Z_{3,t_n}을 발생시켜 상관관계 행렬을 촐레스키분해를 하여서 얻은 행렬 L을 곱해주면 상관관계가 반영된 난수열들이 만들어 진다.

생성한 각각의 난수열들을 위 그림의 조건에 맞게 payoff를 결정하고, 각각의 할인된 payoff의 기댓값을 구한다. 위에서 제시한 미래에셋대우증권 ELS 16222회의 가격을 몬테칼로 시뮬레이션으로 10만번 반복해서 얻은 기댓값은 9789.6이다.

3.2 유한차분법(Finite Difference Method)

유한차분법은 편미분방정식을 차분방정식으로 이산화 시켜서 수치적인 해를 구하는 방법이다. 방법론의 간단한 설명을 위해 기초자산이 1개인 Black-Scholes PDE를 이산화 하는 과정을 보이면 다음과 같다 (T: 만기).

만기 때의 payoff는 알기 때문에, 위의 식에 의해서 시간에 격자 대해 반복적으로 현재까지 풀어오면 현재 가격을 결정할 수 있다. 유한차분법을 적용할 때는 경계조건을 어떤 식으로 쓸 것인지, 어떤 차분 Scheme을 적용할 것인지, 다차원 PDE를 풀 때는 어떤 방법론을 적용할 것인지 등에 대한 문제가 있다. 이 문제들은 수치적인 방법론을 다루는 수학 이론들에서 해결 될 수 있다. 자세한 내용은『파생상품 프로그래밍』(정다래 외, 경문사)와 A practical finite difference method for the three=dimensional Black-Scholes equation (European Journal of Operational Research, Junseok Kim 외), An operator splitting method for pricing the ELS Option(J. KSIAM, Darae Jeong 외) 등을 참고하면 된다. 미래에셋대우 ELS 16222회에는 선형경계조건(Linear Boundary Condition), 함축적방법론(Implicit Scheme), 연산자 분해 방법(Operator Splitting Method)을 적용하였다. 유한차분법을 통해 얻은 이론가는 9770.3이다. 유한차분법은 기초자산의 현재가격, 즉, 한 점에서의 값만이 아니라 각 시간과 기초자산의 가격에 대해 가격표면을 동시에 얻을 수 있다. 그 결과는 아래 그림과 같다.

(4) 4 단계: 구한 근사해에 대한 산업체의 피드백을 받고 필요하면 수리모델링을 수정한다.

아무리 현재 산업현상을 잘 반영하는 모형이라도 그 해를 구하는데 너무 복잡하거나 많은 시간 혹은 매우 고가의 장비를 필요로 한다면 적용하기 어렵다. 실제로,

사용되는 모형 또한 해를 구하는 과정에서 너무 수치적인 방법론이 많이 적용되어야만 하는 모형들은 시간이 오래 걸리기 때문에 잘 사용되지 않는다. 이자율 모형에서 Hull-White 모델은 이런 이유들이 반영되어 잘 사용되어지는 모델의 예인데, 이모형이 쓰이는 이유는 알고리즘의 중간 중간에 해석해를 적용해서 수치적인 방법론의 적용을 최소화해서 계산 속도를 줄일 수 있기 때문이다. 속도 뿐 아니라, 정확도 또한 중요하기 때문에 수치적 방법론에 사용되는 수학이론 및 수학이론에 의해 제시되는 모델들을 실제로 산업에 적용할 때 사용되어지는 알고리즘의 최적화, 컴퓨터과학 등에 대한 이해가 풍부해야 한다. 또한, 각 분야마다 필요로 하는 사전지식이 여러가지 방법론을 적용할 때 알고리즘에 적용되기 때문에 산업체의 피드백이 반드시 필요하고 산업체 또한 학계와의 소통이 필요하다.

3) 산업수학 교과서

학생들이 훌륭한 사회의 구성원으로 성장하기 위해서는 적절한 수학적 논리력을 갖추어야 하고, 이는 충분한 수학개념 학습을 통해 얻을 수 있다. 이러한 논리력은 수학개념을 다양한 분야에 적용시킬 때에도 중요하게 작용할 것이다. 이를 위해서는 다음과 같은 분야에서의 교육이 필요하다고 생각된다. 다만 현재의 수학교육은 과거의 단순 암기식 교육에서의 탈피를 핑계로 너무 극단적인 교육이 진행되고 있기에 일부 접근방식의 변화가 필요하다고 생각된다.

가. 초등학교

1. 기본적인 연산개념 확립: 저학년의 경우에는 기본 수학연산의 개념을 정확히 이해하고 직접 연산이 가능할 수 있어야 합니다. 전자계산기를 통해 연산을 할 수는 있지만 이 부분은 연산 자체보다는 다른 복잡한 수학계산 과정을 이해하는 기본이므로 반드시 학생들이 연산이 가능해야 할 것이다.
2. 올바른 정의 제공: 현재 초등학교 수학교과서는 내용을 쉽게한다는 취지로 수학적 개념에 대한 정의는 생략된 경우가 많다. 이는 오히려 학생들이 정확한 개념을 습득하는데 방해가 되기에, 개념에 대한 정의는 제공하고 이를 토대로 여러 성질을 유도할 수 있도록 교육해야 할 것이다.
3. 적절한 난이도 조절: 현재의 초등학교 1학년부터 6학년까지의 수학교과서의 내용이나 난이도는 학년에 맞게 적절히 조절되어 있지 않습니다. 특히 중학교 수학교과서와 비교하거나 외국의 비슷한 학년 교과서와 비교했을 때 수준이 조절되어야 한다.

나. 중학교

1. 초등학교와 고등학교 수학 사이에서의 적절한 난이도 조절 : 현재 중학교 수학 교과서의 난이도는 초등학교 교과와 고등학교 교과 사이에서 적절히 조절될 필요가 있다.
2. 현실적 입시 고려: 학생들의 학습욕구를 높여주면서도 고등학교 진학 후에 수학을 적절히 이용할 수 있도록 내용 및 난이도를 조절해야 합니다. 수학 포기자를 줄인다는 단순한 취지하에 난이도가 조절되고 특정 학년에서 갑자기 난이도가 변한다면, 수학교육에 있어서의 조삼모사 꼴이 될 수 밖에 없다.
3. 단순한 서술형 문제의 지양 및 수학적 논리력 유도: 수학 교육을 통해 많은 학생들이 수학적인 논리력을 습득하도록 하는 것이 수학 교육의 중요한 목적 중의 하나이다. 따라서 학생들이 단순한 지식의 암기가 아닌 논리력 상승을 위한 교재 및 수업방식이 제공되어야 한다. 하지만, 이는 단순히 수학문제를 서술형으로 변환시킨다고 해서 얻어지는 것이 아니고, 학생들이 다양한 방식의 접근을 통한 사고력 향상을 유도해야 할 것이다. 일부 교과서의 문제들은 수학적 논리력이 아닌 국어지식만을 필요로 하는데 이러한 형태는 피해야 할 것이다.
4. 적절한 컴퓨터 커리큘럼: 초등학교 고학년이나 중학교 학생들이 휴대폰이나 컴퓨터에 대한 접근이 늘어나면서 기본적인 컴퓨터 교육에 대한 관심이 증가하고 있는데, 적절한 커리큘럼이 필요하다. 현재 일부에서 진행되는 단순한 프로그래밍은 대부분 게임을 만들거나 홈페이지를 만드는 경우가 대부분인데 이러한 불필요한 교육이 아닌, 학생들의 논리력을 향상시킬 수 있는 적절한 커리큘럼이 만들어져야 할 것이다. 중학교 시절에는 순수수학의 전통적 과목을 학습하는 것이 단순한 프로그래밍 교육보다 훨씬 중요하다고 생각된다.

4) 산업수학 교과서 : 데이터과학

수학적통계적 응용은 사회와 과학의 실제 영역에서 나온다. 따라서 응용에 앞서 문제의 배경에 대하여 충분히 이해하고 결과를 해당 영역에 잘 전달할 필요가 있다. 이를 위해 “융합 마인드”를 대학 학부에서부터 학생들에게 심어주어야 한다. 대학 커리큘럼으로 젊은 학생들이 수학 또는 통계학 이외에 일정 수 이상의 영역 학문 (경제학, 생물학 등) 교과목을 이수하도록 하게 할 필요가 있다. 교과 운영에서 개인 학습의 비중을 줄이고 탐구형·협업적 학습을 늘려야 한다.

교수들이 움직이는 것이 무엇보다 중요하다. 이것은 교수평가 시스템과 관련이 있다. 교수들의 순수 이론의 연구 뿐만 아니라, 응용 및 개발, 새로운 교과의

개발 등과 같은 다양한 성과에 대한 평가를 하여야 한다. 교수들의 연구적 기여를 학술지 논문에 국한하지 말고 컨퍼런스 및 워크숍 발표와 비학술지 기고 등도 폭넓게 인정하여야 한다.

5) 산업수학 교과서: 계산적 사고력

(1) 과목의 필요성

- 문명 변화의 가속화에 따른 직업군의 혁명적 변화에 대비: 컴퓨터의 발달에 따라 업무가 자동화되면서 직업군이 빠르게 사라지고 있음
  ※ “앞으로 15년 내에 20억개의 일자리가 사라진다.”
- 인간을 앞서가는 컴퓨터의 능력을 이해할 필요: 컴퓨터의 작동원리와 컴퓨터의 능력을 이해하지 않으면 미래의 직업의 변화에 대비하기 어려움
  ※ “기본적인 읽기, 쓰기, 계산 역량과 마찬가지로, 이 역량은 21세기 중반까지는 온 세계 누구나 사용하게 될 기본 소양이 될 것이다.”
- 4차 산업혁명을 선도하기 위한 준비 : 인공지능과 사물 인터넷(IoT)이 이끌어가 4차 산업혁명 시대에 리더가 되기 위해서, 컴퓨팅 사고력은 필수적인 역량임
- 인문·사회계 학생들을 위한 컴퓨팅 사고력 교육을 선도: 이공계 학생들을 위한 컴퓨터 기초 교양과목은 있으나, 너무 코딩 교육에 치우쳐서 인문·사회계 학생들에게는 적절치 않음.
- 컴퓨팅 사고력 교육을 타 대학에 확산 :
  - 세계적으로 하버드 대학에서의 컴퓨팅 사고력 교육과 영국의 초중고 컴퓨팅 사고력 교육이 잘 알려져 있음
  - 우리나라에서는 2015년에 연세대학교에서 신입생 대상으로 교양과목을 개설한 바 있음
  - 컴퓨팅 사고력 교육을 개발하면, 타 대학에 전파할 수 있는 우수한 프로그램이 될 수 있음

(2) 교과목 개요

- 문명의 변화를 이끄는 컴퓨터의 역할 이해하기 : 컴퓨터와 인터넷이 바꾼 문명, 직업의 변화
- 문명의 빠른 변화의 원인과 4차 산업혁명 이해하기 : 인공지능과 사물인터넷이 바꿀 문명, “소프트웨어가 세상을 먹어치우고 있다.”
- 컴퓨팅 사고력이란 무엇인가?

- 문제 해결에 있어 컴퓨터나 다른 도구를 사용할 수 있도록 문제를 구성하기
- 논리적으로 데이터를 조직하고 분석하기
- 모델링이나 시뮬레이션 등의 추상화를 통해 데이터를 표현하기
- 알고리즘적 사고(일련의 단계)를 통하여 해결책을 자동화하기
- 가장 효율적이고 효과적인 단계와 자원의 조합으로 목표를 달성하기 위한 가능한 해결책을 식별하고, 분석하고 적용하기
- 이러한 문제 해결 과정을 일반화하고 다양한 문제들에 응용하기

• 컴퓨팅 사고력을 기르기 위한 기초 다지기 : 문제 기반학습을 통한 사고력 기르기
• 컴퓨팅 사고력을 기르기 위한 프로젝트 수행 : 프로젝트 기반 학습을 통한 문제해결능력 기르기

(3) 학습 목표

• 복잡한 문제를 다루는 데 있어서의 자신감 가지기
• 어려운 문제 해결에 있어서 쉽게 포기하지 않는 끈기 기르기
• 모호함에 대한 관용성 가지기
• 개방형 문제를 해결할 수 있는 능력 키우기
• 협업을 통해 목표를 달성하기 위해 의사소통 잘하기

(4) 주별 학습 내용

주차	내용
1주	가속되는 문명의 변화와 그 원동력은 무엇이었나? - 20세기 과학기술의 발전과 문명의 변화, 직업의 변화 - 3차 산업혁명(전기)의 영향
2주	다가온 4차 산업혁명은 무엇이고, 무엇이 이끌까? - 21세기 과학기술의 발전과 문명의 변화, 직업의 변화 - 4차 산업혁명의 역할과 영향의 범위
3주	컴퓨팅 사고력이란 무엇인가? - 컴퓨팅 사고력의 정의, 컴퓨팅 사고력의 사례
4주	컴퓨팅 사고력이 왜 중요한가? - 컴퓨팅 사고력의 응용, 미래에 필요한 역량 - 인간과 컴퓨터의 대결: 체스(1997), 제퍼디(Jeopardy) 퀴즈쇼 (2011), 바둑(2016)
5주	논리적으로 데이터를 조직하고 분석하기 - 데이터 수집, 데이터 분석, 데이터 표현 - 문제 기반 학습 병행

6주	추상화(모델링, 시뮬레이션)를 통해 데이터를 표현하기 - 문제 분해, 시뮬레이션, 병렬화 - 문제 기반 학습 병행
7주	알고리즘적 사고를 통하여 해결책을 자동화하기 - 추상화, 알고리즘 & 과정, 자동화 - 문제 기반 학습 병행
8주	효율적이고 효과적인 해결책을 식별하고 적용하기 - 효율적인 해결책의 정의: 데이터, 추상화, 알고리즘 - 효율적인 해결책 식별 방법 - 문제 기반 학습 병행
9주	중간고사 - 전반기 수업 내용의 이해에 대한 점검 - 학생들이 자신의 전공과 관련된 내용에서, 실생활과 관련된 문제 제시하기
10주	문제 해결 과정을 일반화하고 다양한 문제들에 응용하기 - 9주에서 학생들이 제시한 문제를 공개 - 토론을 통해 학생들의 관심이 많은 실생활 문제 선정 - 문제기반학습을 위한 간단한 문제와 장기간을 요하는 프로젝트기반학습을 위한 문제로 분류하기 - 9주에 제안된 문제를 다듬어서 문제기반학습의 문제로 정의하기
11주	문제기반학습 수행하기 - 교수가 제안하는 문제기반학습 수행하기 - 9주에 제안된 문제를 다듬어서 프로젝트 기반학습의 문제로 정의하기
12주	프로젝트 기반학습을 다듬고 선정하기 - 9주에 학생이 제안안 문제기반학습 수행하기 - 9주에 학생이 제안안 프로젝트 다듬고 선정하기
13주	심화 프로젝트에 대해 토론하기 - 12주에 선정된 프로젝트의 수행 과정에 대해 중간 발표하기 - 중간 발표에 대해 다른 팀의 제안과 비판
14주	심화 프로젝트 발표하기 - 팀별로 프로젝트 수행 결과 발표하기와 토론
15주	종합 토론 - 전반기에 학습한 내용과 후반기에 문제기반학습과 프로젝트기반학습의 결과에 대한 종합 토론

(5) 자료 및 교재

- 컴퓨팅 사고력을 위한 적절한 교재는 거의 없으므로, 과목이 개설되면 충북대 학생들을 위한 교재를 개발해야 함.

〈표 6.7〉 인문·사회계 학생들을 위한 몇 가지 프로젝트 사례

《데이터의 조직과 분석》 1. 카피 라이트에 반하여 카피 레프트 운동이 있다. 리눅스(Linux)라는 운영체계는 소스가 오픈되어 있어 카피 레프트의 대표적인 예이다. 카피 레프트 사례를 모으고 분석해 보라. 2. 교통, 통신의 발달이 오히려 대인관계의 질을 떨어뜨리고 있는지를 확인하기 위한 정량적 자료를 수집하여 분석하라. 또한 교통, 통신의 발달과 현대 사회의 우울증 증가가 정적 상관이 있는지 확인하고 이 자료만으로 둘 사이의 인과적 관계를 주장할 수 있는지 논하라
《문제 분해》 1. A라는 사람이 술을 마시고 길을 걸어가고 있다. 정신 줄을 놓고 비틀비틀 걸어가다가 B라는 사람과 마주친다. A는 B가 기분 나쁘게 쳐다본다는 느낌이 든다. 그래서 A는 B의 뒤통수를 한 대 때린다. A는 의기양양하게 집으로 들어가 곯아떨어진다. 그런데 다음날 B는 사체로 발견된다. A는 B가 죽었다는 것을 나중에야 알게 된다. 아래의 법조문을 근거로 위 사례를 분해하여 재구성한 후, A는 어떠한 책임을 부담하는지 결론을 도출하시오. • 형법 제250조 제1항 사람을 살해한 자는 사형, 무기 또는 5년 이상의 징역에 처한다. • 형법 제260조 제1항 사람의 신체에 대하여 폭행을 가한 자는 2년 이하의 징역, 500만 원 이하의 벌금, 구류 또는 과료에 처한다. • 민법 제750조 고의 또는 과실로 인한 위법행위로 타인에게 손해를 가한 자는 그 손해를 배상할 책임이 있다.
《알고리즘을 사용한 해결책 자동화》 1. ‘기분 상태가 기억에 영향을 미치는가?’, 즉 기분 상태와 기억은 인과관계가 있는 지를 밝히기 위한 실험 설계를 해보라.
《효율적 해결책 식별》 1. 『좌절-공격 가설』, 즉 좌절과 공격성 증가는 인과적 관계가 있는지를 검증하기 위한 실험 설계를 해보라 2. 컴퓨터의 발달, 대용량 저장장치의 급속한 증가, 인터넷의 발달, google 검색이나 포털사이트 검색 같은 검색 기술의 발달로 자신이 직접 기억하지 않더라도 필요한 정보에 쉽게 접근할 수 있는데 미래 사회에도 여전히 책을 읽고 지식을 암기할 필요가 있을까?

- Google의 컴퓨팅 사고력 교재, 하버드의 컴퓨팅 사고력 교재, 교재, 연세대학교의 컴퓨팅 사고력 교재 등을 참고하여 개발할 예정임.
- 개발된 자료는 인터넷에 탑재하여 다른 대학에도 공개함.

(6) 기타

- 인문·사회계 학생들을 위한 컴퓨팅 사고력 교육에는 인문·사회계 학생들이 관심을 가질만한 문제와 프로젝트를 제시하는 것이 중요함.

• 여기에서는 인문·사회계 학생들을 위한 몇 가지 사례를 〈표 6.7〉에 제시 함.

제 7 절 산업수학 교과서 학습 내용으로 적합한 예들 : 수학이 빛나는 순간

다음 리스트는 대한수학회 홈페이지에 있는 수학이 빛나는 순간들의 내용들이다. 과학, 자연, 기술, 그리고 인류 문명의 발전에 수학이 기여하는 역할에 대한 올바른 평가와 이해를 촉진하기 위하여 미국수학회가 운영하는 ‘수학이 빛나는 순간(Mathematical Moments)’ 프로그램은 여러 곳에서 갖가지 다양한 목적으로 쓰이는 수학의 활약상을 소개하고있다. 대한수학회는 미국수학회와 협의하여 이 프로그램의 결과를 한국어로 번역하여 배포하고 있다. 이 리스트에 나오는 내용들은 산업수학 교과서의 교육 내용들로 적절한 내용들이라 생각된다.

• 해양 기술하기

  - 최근까지는 해양 모형을 구성하기 위한 적절한 도구도 충분한 데이터도 없었습니다. 이제 새로운 데이터들과 새로운 수학으로 (예를 들어, 엘니뇨가 언제 발생할 지와 같은) 단기 기후 예측이 가능해 졌습니다. 하지만 장기 기후 예측을 위하여 연구해야 할 것이 여전히 많음에도 불구하고, 해양에 대한 이해는 너무 빈약합니다.

    기존의 방정식들이 해양 역학을 기술하지만, 현재로는 그 방정식들의 해에 도달하기 어렵습니다. 이 방정식들의 적절한 해에 근사하는데 필요한 데이터를 수용할 수 있는 컴퓨터가 없기 때문입니다. 그래서 연구자들은 방정식을 풀기 위하여 가정을 단순화합니다. 이렇게 가정을 단순화하여 유도한 모형의 정확성은 새로운 데이터를 사용하여 시험합니다. 해양을 이해하지 않고서는 기후를 이해할 수 없기에 이 연구는 매우 중요합니다. 더 알아보기: What's Happening in the Mathematical Sciences, Vol 1, Barry Cipra..

• 영화를 생생하게 만들기

  - 많은 영화 애니메이션 기법이 수학에 기반을 두고 있습니다. 캐릭터와 배경 과 그들의 움직임까지 모두가 픽셀들을 결합하여 기하학적 형상으로 구성하는 소프트웨어를 이용하여 만들어지고, 이러한 기하학적 형상들의 조작 및 저장은 컴퓨터 그래픽 수학을 이용하여 이루어집니다.

소프트웨어는 위치, 동작, 색상, 질감처럼 시각적으로 중요한 특징들을 부호화 하여 각 픽셀들에 담습니다. 그리고 벡터, 행렬, 곡면에 대한 다각형 근사를 이용하여 각 픽셀의 색조를 결정하여 줍니다. 컴퓨터로 만든 영화는 프레임마다 200만개 이상의 픽셀과 무려 4,000만 개 이상의 다각형을 담을 때도 있습니다. 엄청난 수의 계산이 필요하므로 컴퓨터 사용은 불가피하지만, 수학이 없다면 컴퓨터는 무엇을 계산할지 모를 것입니다. 어느 애니메이션 제작자가 이렇게 말했습니다. “...모든 것은 수학으로 제어해요...학교에서 배울 때는 하찮아 보이던 X, Y, Z들-맙소사, 그것들이 갑자기 다 이용되는 거예요.”

더 알아보기: Mathematics for Computer Graphics Applications, Michael E. Mortenson, 1999.

• 항공기 설계하기

- 공기(그리고 물)의 흐름에 대한 연구가 백 년이 넘게 진행되어 왔으나 수학자들이 공기역학의 핵심 문제인 난류의 복잡한 현상을 이해하기 시작한 것은 최근의 일입니다. 수학과 현대 컴퓨터 덕분에 오늘날 항공기 설계에 풍동(風 洞)을 사용하는 일은 거의 없습니다.

나비어-스토크스(Navier-Stokes) 방정식이 유체 흐름을 기술하지만, 이 편미분방정식의 정확한 해는 알려지지 않았습니다. 유체 흐름이 빠를수록 이 방정식의 비선형 항이 증가하여 방정식에 대한 수치해가 구하기 어려워집니다. 그래서 항공기에 미치는 난류의 영향은 특별히 이해하기 어려우며 현대 슈퍼컴퓨터의 계산 능력으로도 어렵습니다. 현재 기술로 이 문제에 접근하려 면 관련 이론의 발전이 필요합니다. 현재 수학자들은 난류를 설명하고자 하는 두 가설인 리차드슨(Richardson) 법칙과 콜모고로프(Kolmogorov) 법칙을 입증하려 노력하고 있습니다.

더 알아보기: What’s Happening in the Mathematical Sciences, Vol. 3, Barry Cipra.

• 인터넷 통신의 안전성 보장하기

- 암호에 관한 수학 없이는 누구도 인터넷상에서 안전하게 쇼핑하거나, 지불하거나, 업무를 수행할 수 없습니다. 수 세기 전에 증명된 대수적 사실들에 기반을 두고 있지만, 오늘날의 복잡한 암호 기법들이 구축된 것은 지난 25년 안의 일입니다.

공개키 암호화 방식은 사용자로 하여금 복호화 키는 숨기면서도 암호화 키를 모두가 사용하도록 공표할 수 있게 하여 줍니다. 그러한 알고리즘 중 하나인 RSA는 현대 브라우저에 쓰이는 암호화의 배경이 되고 있습니다. 최근에 미국 국립표준기술국은 앞으로 전자 통신에 쓰일 것으로 고급 암호화 표준(AES)을 채택하였습니다. 이 새로운 표준은 순열, 모듈 연산, 다항식, 행렬, 유한체를 이용하여 자유롭지만 안전하게 정보를 전송할 수 있게 합니다.

더 알아보기: Communications Security for the Twenty-first Century, Susan Landau, Notices of the American Mathematical Society, April 2000.

• DNA 해독하기

- 정원용 호스를 사용해 본 사람이라면 매듭이 이상한 곳에 지어진다는 것을 알 것입니다. 과학자들은 매듭이론이라는 수학 분야가 DNA를 포함한 여러 익숙한 곳에서 나타나는 것을 발견하였습니다. 수학은 DNA가 어떻게 기능하고 자기 복제를 하는 지를 이해하는 데에 핵심 역할을 합니다.

어떤 효소는 DNA 가닥을 한 군데 자른 후, 빈 틈 사이로 가닥의 다른 부분을 지나가게 한 후, 잘린 부위를 다시 봉합합니다. 매듭이론은 어떤 효소가 얼마나 빈번하게 활동해야 하는가 이해할 수 있게 하며, 이로부터 이 효소가 산물을 생성하는 데에 걸리는 시간을 추정할 수 있게 합니다. 이러한 복잡한 조작 과정은 (DNA 수선과 유전자 조절을 포함한) 여러 세포 활동에 중요한데, 매듭이론에서 핵심적인 문제와 같은 유형입니다.

더 알아보기: What's Happening in the Mathematical Sciences, Vol. 2, Barry Cipra.

• 음악 감상하기

- 그것이 모차르트가 됐던, 트위스티드 시스터즈가 됐던, 아무리 복잡해도 음악(혹은 데이터)은 수 0과 1만을 이용해 디스크에 저장됩니다. 그러기 위해서 수학의 여러 분야들(초급인 것과 고급인 것 모두)이 그 과정의 단계마다 사용됩니다.

신호 처리: 일정하고 짧은 시간 간격으로 음파를 측정하여 원음을 샘플링합니다. 얼마나 짧은 간격이어야 하는지는 새넌(Shannon)의 샘플링 정리가 결정합니다.

2진법 산술: 진폭을 0과 1로 이뤄진 16비트 열로 나타냅니다. 0과 1들은 CD 상에 판판한 곳과 패인 부분으로 각각 저장됩니다.

편미분방정식: 유체 역학의 방정식이 데이터를 덮는 반사막과 보호막의 압축 과정에 적용됩니다.

선형대수학: (예를 들어 먼지나 스크래치 등으로) 어쩔 수 없이 생기는 0과 1의 훼손을 오류 정정 부호로 복구합니다.

삼각법과 미적분: 데이터를 불러올 때, 데이터에 초점을 맞춘 레이저를 추적기가 움직입니다. 레이저가 디스크의 중앙 부분에서 가장자리로 읽어나갈 때, 데이터 판독 속도를 일정하게 유지하려면 모터는 CD를 점점 느리게 돌 려야 합니다.

더 알아보기: Scientific American, Ken C. Pohlmann, 1998.

• 일기 예보하기

- 일기 예보에는 엄청난 양의 데이터와 계산이 동원됩니다. 날씨에 대한 정확 한 모형을 만들기 위해서는 (무엇보다도) 다양한 지점과 고도에서의 온도, 습도, 기압, 풍속 등을 알아야 합니다. 빗나간 일기 예보들이 더 기억에 남겠지만, 불과 20년 전의 36시간 예보보다 현재의 3일~7일 예보가 더 정확합 니다. 컴퓨터 계산 능력의 발전으로 일기예보가 향상될 수 있었지만, 그보다 정확도를 크게 향상시킨 것은 모형의 기반이 되는 수학이었습니다.

수집한 정보는 관련된 비선형 편미분방정식에 대한 근사해를 위한 수치계산의 기초가 됩니다. 날씨 모형은 지구의 자전과 땅, 바다, 공기 간의 끊임없는 상호 작용을 고려합니다. 더 많은 데이터와 더 강력한 컴퓨터가 일기 예보를 향상시킨 겉으로 드러난 원인이지만, 샘플링 기법의 발전과 더 효율적인 데이터의 사용 또한 배후에서 능력 향상에 기여하였습니다.

더 알아보기: Weather Analysis and Forecasting, Bulletin of the American Meteorological Society, 1999.

• 지문 저장하기

- 수백만 개의 지문의 디지털 버전을 저장하고 식별하는 일은 상상 이상의 엄청난 작업입니다. 미국 연방 수사국이 현재 보유한 지문 파일을 압축하지 않 았다면 200테라바이트(200,000,000,000,000바이트)에 달했을 것입니다. 새로운 수학 도구인 웨이블릿(wavelet)은 빠르고, 비교적 정형화되게 하고,

훨씬 적은 비용이 들게 데이터를 압축하여 데이터 저장을 쉽게 하고 검색이 빨라지게 합니다.

이미지는 사실 각 픽셀에 색과 농도를 주는 함수입니다. 이 함수는 웨이블릿이라는 또 다른 특별한 함수들의 조합으로 나타낼 수 있습니다. 함수 자체를 저장하는 것보다 웨이블릿들이 결합하는 규칙을 저장하는 것이 더 저장하고 검색하기 수월합니다. 웨이블릿은 사인과 코사인을 바탕으로 한 데이터 압축 기법인 푸리에변환의 두 가지 측면에서 개선한 형태입니다.

더 알아보기: What's Happening in the Mathematical Sciences, Vol. 2, Barry Cipra.

- 결정 생성하기
  - 수학의 힘과 현대 컴퓨터의 빠른 속도 모두가 결정 형성을 연구하는 데 필요합니다. 아름다운 눈송이를 이해할 수 있다는 미학적 매력 외에도 결정 생성 에 관한 분야는 철강, 초전도체, 컴퓨터 칩의 무결성 연구에 필수적입니다.

  결정들이 형성되는 과정에서 불규칙한 가변 경계들이 나타나기 때문에 방정 식의 해는 수치적으로만 얻을 수 있습니다. 결정 형성 과정의 일부는 일정 부피에 대한 최소 표면적의 원칙을 따르지만, 결정의 방향 또한 그 형성 과정에 영향을 미칩니다. 열은 표면으로 흡수될 때보다 방출될 때 더 쉽게 확산되기 때문에, 외부를 향한 결정들이 다른 것들보다 더 빨리 형성됩니다. 결정들의 방향이 결정 형성 문제를 더 복잡하게 하므로 관련 방정식을 풀기가 더욱 어렵습니다.

  더 알아보기: What's Happening in the Mathematical Sciences, Vol. 1, Barry Cipra.

- 심장으로 실험하기
  - 살아있는 인간의 심장으로 실험하는 것은 가능하지 않지만, 심장의 정밀한 수학 모형으로 실험하면서 심장의 복잡한 작용을 이해하는 새로운 길이 열렸습니다. 실험실의 수년 동안의 실험을 수학과 컴퓨터가 대체할 수 있습니다. 예를 들어 수학으로 얻은 지식은 인공 판막의 설계와 구현을 매우 빠르게 하였습니다.

  훅의 법칙에 근거한 방정식들이 심장의 근섬유를 각각 다른 탄성을 지닌 폐곡 선으로 표현함으로써 심장의 기하학적 구조를 모형화합니다. 모든 유체 흐름 을 서술하는 나비어-스토크스(Navier-Stokes) 방정식은 심장의

내부와 주변을 도는 피의 흐름을 모형화합니다. 그러나 심장의 형태가 끊임없이 변한다는 사실 때문에 이러한 방정식은 풀기가 특히 어려우므로 정확한 해를 찾을 수는 없습니다. 근사해들은 컴퓨터로 생성합니다.

더 알아보기: What's Happening in the Mathematical Sciences, Vol. 1, Barry Cipra.

• 프랙털을 통해 세상 보기

- 프랙털은 자기 유사성을 지닌 수학적 대상으로서 컴퓨터 그래픽과 시뮬레이션을 더욱 실감나게 만들어 줍니다. 프랙털의 자기 유사성은 고사리나 해안 선의 자기 유사성과 비슷합니다. 즉 계속 확대하여도 각각 본래의 것과 닮은 이미지들이 만들어집니다.

  프랙털은 단순한 과정들의 반복과 관련이 있기에 종종 혼돈 이론에도 등장합니다. 프랙털과 마찬가지로 혼돈계에도 숨겨진 복잡성이 존재합니다. 과정 초기의 작은 변화들이 다시 피드백 되어 나중에 결과가 엄청나게 달라질 수 있습니다. 한가지 예가 나비의 작은 날갯짓이 몇 주 후에 지구 날씨에 큰 변 화를 줄 수 있다는 나비효과입니다.

  더 알아보기: Chaos and Fractals, H. Peitgen, H. Jurgens, and D. Saupe, 2004.

• 상품 추적하기

- 정수론은 인터넷 통신 보안의 기반이 되면서 또한 책의 ISBN(국제 표준 도서 번호)과 그의 UPC(범용 상품 부호)의 신뢰성도 보장해줍니다. 인증된 ISBN 번호는 책을 컴퓨터로 추적할 수 있게 하고, UPC 번호는 책을 개별로 식별하여 책의 인세를 해당 저자에게 지급할 수 있게 해줍니다.

  마지막 자릿수를 제외한 ISBN 번호의 자릿수에 미리 지정된 수를 나머지 연산으로 곱합니다. 이 곱들의 합을 이용하여 검증 숫자를 계산합니다. 이 검증 숫자를 번호의 끝에 추가합니다. 검증 숫자는 의도적 사기를 예방할 뿐만 아니라, 두 자릿수가 뒤바뀌는 것과 같은 사람에 의한 실수 또한 감지합니 다. 이런 과정은 운전면허증과 항공권에도 널리 사용됩니다.

  더 알아보기: Contemporary Abstract Algebra, Joseph A. Gallian, 1998.

• 시장에 투자하기

- 경제를 이끌어가는데 도움을 준 파생상품과 같은 복잡한 금융 도구들이 지난 20년 동안 많이 개발되었습니다. 금융 파생상품은 그 가치가 어떤

다른 것의 가치에 의해 파생되는 수학적 도구로, 위험하다고 보는 이들도 있지만 그 의도는 위험을 다른 것들과 나눔으로써 줄이는 데에 있습니다.

선물 옵션의 현재가는 다변수 적분으로 근삿값을 계산합니다. 하지만 옵션 구성 요소의 수가 늘수록 다변수 적분의 복잡성은 기하급수적으로 증가합니다. 그래서 전통적인 근삿값 계산법은 곧 컴퓨터 계산의 영역을 넘어섭니다. 새로운 방법(저(低) 불일치도 수열을 사용하는 준 몬테칼로 방법)은 훨씬 정확한 결과를 제공하면서도 필요한 표본의 양은 더 적습니다. 이러한 방법으로 원하는 계산이 가능해집니다.

더 알아보기: What's Happening in the Mathematical Sciences, Vol. 3, Barry Cipra.

• 인터넷 트래픽 추적하기
  - 인터넷상에서 정보 패킷이 움직이는 방식을 이해하는 것은 도전적인 문제입니다. 인터넷 트래픽은 전통적인 전화선 트래픽과는 사뭇 다르게 행동합니다. 프랙탈에 기반한 모형화로 개인의 타이핑 사이 시간 간격에서부터 전송되는 파일의 크기에 이르기까지 인터넷 데이터 트래픽의 여러 측면을 효과적으로 묘사할 수 있었습니다.

  전화 통화의 특성은 일반적으로 예측 가능하지만, 인터넷은 세션 길이처럼 종종 예측할 수 없으며 음성 트래픽과는 전혀 다른 특성이 있습니다. 예를 들어 전화 네트워크는 관찰 주기가 길어질수록 트래픽 패턴이 평탄해집니다. 그러나 인터넷 데이터는 전혀 평탄해지는 일이 없으며 장기적이든 단기적이든 트래픽 패턴에 돌출적인 폭증이 나타납니다. 새로운 인터넷을 새로운 수학으로 기술한다면 인터넷에서 경험하는 것이 더 예측 가능해질 것입니다.

  더 알아보기: Where Mathematics Meets the Internet, Walter Willinger and Vern Paxson, Notices of the American Mathematical Society, September 1998.

• 더 좋은 렌즈 제작하기
  - 안경 렌즈, 특히 누진 렌즈의 설계는 기하학, 재료 과학, 편미분방정식이 경이로운 방식으로 관련된 수학 분야입니다. 이 분야는 (특히 40대가 넘는) 사람들의 일상에 영향을 미치는 활발한 연구 영역입니다.

  누진 렌즈에서 서로 다른 배율 사이를 자연스럽게 이동하면 사용자로서는 편리하겠지만, 한 렌즈에 두 개 이상의 서로 다른 구면을 결합해야 하는 설

계자에게는 많은 어려움이 있습니다. 더욱이 구면의 곡률 차이 때문에 시야가 왜곡되는 일(난시)이 생기는데, 이러한 현상은 옆으로 혹은 위아래로 구면을 압축하는 원기둥꼴 수정으로 감소됩니다. 그러므로 설계자는 여러 구 면의 납작해진 부분들을 하나에서 다른 것으로 이동하는 것이 최대한 매끄럽도록 결합하여야 합니다. 곡면의 기하학인 미분기하학의 발전은 렌즈를 더욱 빠르고 효율적으로 설계할 수 있게 하여, 지루한 시행착오 없이 렌즈의 최적 형태를 찾게 해 줍니다.

더 알아보기: Lens Talk,Vol. 26, No. 13, Darryl Meister.

- 뇌의 지도 그리기
  - 특정 기능에 대응하는 뇌의 부분을 정확하게 식별해내려 할 때 수학이 사용됩니다. 지구를 지도로 옮기는 것처럼 3차원의 뇌를 2차원으로 그리는 연구가 최근 이루어지고 있습니다. 그러나 뇌의 표면에는 수많은 틈새와 주름들이 존재하므로, 뇌의 지도를 그리는 것은 지구의 지도를 그리는 것보다 훨씬 복잡합니다.

    보통의 이미지처럼 나타내면, 깊이가 다른 두 지점이 가까워 보일 수 있습니다. 이러한 지점들을 구별할 수 있는 지도를 만들기 위해서 연구자들은 위상 수학, 그리고 쌍곡기하학과 구면기하학을 포함한 기하학을 이용합니다. 등각 사상(뇌와 평면 지도 사이의 대응 관계로 점들 사이의 각을 왜곡하지 않는 것)은 뇌를 정확히 묘사하려면 특히 중요합니다. 지구의 지도가 항해를 돕듯이, 등각사상은 학자들이 뇌를 이해하기 위한 탐험에 안내자가 됩니다.

    더 알아보기: http://www.math.fsu.edu/~mhurdal/research/flatmap.html

- 눈으로 신원 확인하기
  - 홍채 인식은 우리가 현금지급기를 쳐다보는 것만으로 신원이 확인되게 하여 비밀번호 없는 세상에 살게 할지도 모릅니다. 홍채 인식을 통한 신원 확인에 는 패턴 인식, 웨이블릿(wavelet), 통계학을 사용합니다. 패턴 인식과 웨이 블릿은 홍채의 패턴을 0과 1의 문자열로 바꾸는 데 사용하고, 통계학은 스캔 한 홍채가 특정인의 홍채라는 사실을 확인하는 데 사용합니다.

    홍채는 쌍둥이 간에도 패턴이 크게 달라 신원 확인에 적합한 신체 특징입니다. 그 가변성은 스캔된 코드가 저장된 코드의 3분의 2만 맞아도

정확한 신원 확인을 보장합니다. 더욱이 눈과 홍채는 모양과 위치 덕분에 스캐너가 쉽게 찾을 수 있습니다. 홍채의 위치를 파악하면 웨이블릿을 써서 홍채에서 표집한 부분의 패턴을 2진 부호들로 변형합니다. 이 2진 부호들은 홍채 표집 부위와 특정 웨이블릿이 일치하는지를 반영합니다. 홍채 전체는 약 2000비트로 부호화됩니다. 이러한 비트 패턴을 데이터베이스 내의 수많은 홍채 코드와 비교 하여 상대적으로 일치하는 것을 찾는 것으로 신원 확인이 끝납니다. 이 대조 작업은 병렬로 계산되므로 전 과정이 눈 깜짝할 사이에 이루어집니다.

더 알아보기: Iris Recognition, American Scientist, John Daugman

• 현명하게 입찰하기

- 대부분 사람에게 친숙한 기본적인 경매 방식은 경매가 취할 수 있는 여러 방 식 중 하나일 뿐입니다. 예를 들어, "차(次)고가 경매"에서는 최고 입찰자 에게 물건을 양도하지만 두 번째로 높은 입찰가를 청구합니다. (이 방식이 판매자에게 생각보다 나쁘지 않습니다. 입찰이 더 공격적으로 갈 수 있기 때문 입니다.) 이러한 경매 방식들에 대한 연구에 수학적 모형화, 게임이론, 조합 론, 정수 프로그래밍, 최적화이론이 사용됩니다. 연구자들이 알아낸 한가지 기 본적인 사실은 미숙한 입찰자는 거의 언제나 가격을 지나치게 높게 부른다는 것입니다.

  인터넷은 경매로 팔리는 품목들이 증가하게 된 한 요인입니다. 물건이 필요한 회사가 판매자들에게 값을 부르게 하고 최저가로 낙찰하는 역경매 역시 인기 를 얻고 있습니다. 새로 개발된 경매 방식에서는 여러 품목을 묶음으로 경매 할 수 있게 하거나 여러 번의 호가 회차가 연관되게 하기도 합니다. 경매가 빈번해 졌다는 경향은 항공산업에서도 찾아볼 수 있는데, 비행기가 출발하는 게이트나 좌석을 양도하여 받는 할인권의 금액 역시 경매로 결정되기도 합니다.

  더 알아보기: The Economic Theory of Auctions, Paul Klemperer, ed.

• 투표가 사표가 되지 않게 하기

- 셋 이상에서 하나를 선택하는 선거에서 과반수의 선호가 없는 경우의 선거 결과는 득표수 자체보다는 투표 절차가 더 결과를 결정합니다. 수학자들은 이러한 선거에서 비논리적인 결과가 발생하지 않을 가능성보다 발생할 가능성이 더 높다는 것을 보였습니다. 예를 들어, 어느 집단의 다수가 따뜻한 곳으로 가기를 원하지만, 최다 득표지는 아래 그림에서처럼 남극일

수도 있습니다. 따라서 대부분의 선거방식처럼 집단의 휴가지를 정한다면 남극으로 가게 될 것이고, 여섯 명은 동상에 걸리지는 않는다 해도 실망할 것입니다.

각 투표자의 1순위 선택만을 계산하는 선거방식은 학교에서 ‘수’의 개수로만 최우등생을 선발하는 것과 같습니다. 이러한 불공평한 상황을 해소하기 위해서 여러 선거 방법이 개발되었습니다. 성적표에서 등급을 매기는 것처럼 각각의 선택에 점수를 매기는 것도 한 방법입니다. 이 방식으로 결정한다면 아래 그림의 집단은 따뜻한 곳으로 휴가를 떠날 것이고, 이 집단에게는 더 바람직한 결과입니다. 수학자들은 아무도 불공평하게 추위에 떨지 않게 하는 공정한 선거 방식을 연구하고 있습니다.

더 알아보기: Chaotic Elections: A Mathematician Looks at Voting, Donald Saari

- 은하계 시뮬레이션하기
  - 은하계는 폭이 십만 광년 이상일 수도 있고, 수천억 개의 천체로 구성될 수도 있고, 질량이 우리 태양의 1조 배에 달할 수도 있습니다. 그 속의 많은 별들이 혼란스러운 궤도를 가지는 이렇듯 거대하고 복잡한 시스템을 모형화하려면 새로 운 계산 기법이 필요합니다. 병렬 계산법과 함께 컴퓨터의 속도와 메모리의 발 전이 모형을 개선시켜 왔지만, (문제에 관련된 수학을 컴퓨터가 수행할 수 있는 단계들로 전환시키는 방식인) 알고리즘의 발전이야말로 정확한 은하계 모형을 만드는 데 없어서는 안 되는 것입니다.

    은하계의 운동을 시뮬레이션하는데 있어 복잡함은 은하수 자체에 한정되지 않습니다. 은하계는 보통 성단이나 초성단의 일부이기 때문에 이러한 더 큰 덩어리가 가하는 외부 힘 또한 고려해야 합니다. 그러므로 모형은 다양한 거리 규모에 대해서도 정확성을 유지해야 합니다. 연구자들은 모형의 방정식을 모든 구역에 걸쳐 균일하게 수치해를 구하는 대신, 더 중요하다고 판단하는 구역에 더 많은 계산을 적용하는 다중 규모 알고리즘을 사용합니다. 이러한 기법은 계산 능력을 더욱 효율적으로 사용하여, 우주의 근본적인 구조를 엿볼 수 있게 해줍니다.

    더 알아보기: http://archive.ncsa.uiuc.edu/Cyberia/Cosmos/CosmosGoDigital.html

- 자연의 비밀 들여다보기

- 수리 생태학은 수학과 생태학을 결합한 활발히 성장하고 있는 학제간 연구 분야 로, 복잡한 생물계를 이해하고 모형화하기 위해 수학의 거의 모든 분야(선형대 수학, 해석학, 미분방정식, 확률과정, 수치 시뮬레이션, 통계학)를 이용합니다. 이 모형화는 어떤 종을 유지하는데 필요한 면적이나 특정 지역에 침투한 외래종의 확산 속도와 같은 중요한 변수들과 문턱값(threshold)들을 정하는데 도움을 줍니다.

  이러한 모형들은 어떤 종이 다른 종이나 환경과 어떻게 상호작용하는지 담아내 기 위해 상당히 복잡할 수밖에 없습니다. 오늘날의 수리 생태학 연구자들은 서로 다른 규모의 시간, 크기, 공간에 걸친 유기체들의 네트워크를 시뮬레이션하는 매우 난해한 과제에 직면하고 있습니다. 이를 해결하기 위해서 연구자들은 비선형역학계나 공간 통계학과 같은 비교적 새로운 수학 분야들에 의지합니다.

  더 알아보기: Mathematical Models in Biology, Leah Edelstein-Keshet.

- 종이접기의 수학
  - 종이접기가 수학 탐구 주제나 정교한 응용의 대상이 될 것으로 보이지 않겠지 만, 지도를 접거나 선물을 포장해 본 사람이라면 종이접기가 결코 단순한 일이 아님을 알 것입니다. 최근 들어 수학자와 컴퓨터 과학자, 공학자들은 수 세기 동안 이어온 이 놀이가 현대의 많은 문제를 푸는 데 이용될 수 있음을 발견하였습니다. 종이접기는 자동차의 에어백이나 거대한 우주 망원경을 효율적으로 접는데에 사용되며, 단백질의 접힘과도 관련이 있을 수 있습니다.

    제조업자들은 종종 하나의 재료로 물건을 만들고 싶어합니다. 그럴 경우, 제조 문제는 접을 수 있는 모양인지, 접을 수 있다면 효율적으로 접을 방법은 있는지를 찾는 문제가 됩니다. 따라서 다수의 종이접기 연구는 알고리즘 복잡성이론, 최적화이론과 관계됩니다. 분자 수준의 문제, 제조업의 문제, 우주 공간의 문제 등에 응용할 수 있다는 사실은 수학의 힘 뿐만 아니라 종이접기의 다양함 을 보여주는 증거입니다.

    더 알아보기: **http://db.uwaterloo.ca/~eddemain/papers/MapFolding/**

- 웹 검색하기
  - 선반에 잘 정리된 책들 대신 수억 장의 종이가 아무렇게나 무더기로 쌓여있는 도 서관에서 적절한 정보를 신속하게 찾으려 한다고 상상해 보십시오. 이것이 웹 검 색 엔진이 하루에도 수백만 번씩 반복하는 일입니다. 1세대의

검색 엔진도 유용한 페이지를 찾아내기는 하였지만, 그 페이지들이 검색 결과 목록에서 너무 아래에 있어 실질적인 도움이 되지 못하는 경우가 종종 있었습니다. 현재의 검색 엔진은 수학(확률론, 그래프이론, 선형대수학)을 이용하여 페이지에 등급을 매겨 질의에 관련성이 가장 높은 사이트들을 사용자가 쉽게 볼 수 있도록 결과 목록 상단에 올려 놓습니다.

웹상의 방대한 양의 페이지와 링크는 웹페이지를 점으로, 링크를 유향직선으로 나타낸 그래프로 표현할 수 있습니다. 오늘날의 검색 엔진은 어떤 페이지의 질의 에 대한 관련성을 그 페이지로부터 나오고 들어가는 페이지들의 중요성을 반영하여 계산합니다. 따라서 검색에서는 페이지의 링크가 페이지의 내용만큼이나 중요할 수 있습니다. 마지막 등급 매기기 과정에서는, 어떤 검색 엔진의 설계자들이 말 한 바로는, 수백만 개의 변수와 수십억 개의 항들을 포함하는 방정식들을 세우고 계산할 수 있게 해주는 선형대수학과 확률론의 기법을 사용합니다. 미래에는 검색 엔진이 인공 지능과 이전 검색에 관한 정보를 이용하여 질의의 실제 의도를 인지할 수 있을지도 모릅니다.

더 알아보기: David Voss, Better Searching Through Science, Science, 14 Sept. 2001

• 이미지 향상시키기

- 시각적 작품을 복원하는 오래된 숙련 기능인 화상복원은 최근까지도 오직 전문 가만이 수공으로 하는 작업이었습니다. 지금은 많은 사람이 컴퓨터를 이용해 디 지털 사진을 수정하지만, 그 과정은 여전히 많은 공을 들여야 하는 작업입니다. 사용자가 거의 입력하거나 수고하지 않아도 편미분방정식을 풀어 디지털 화상 복원을 가능하게 하는 알고리즘을 개발하는 분야가 새롭게 기대되는 수학 연구분야입니다. 이러한 방법은 아래 사진의 예와 같이 이미지 전송시 잃어버린 부분을 다시 전송받지 않고 복원하는 데에도 사용됩니다.

이 새로운 알고리즘이 겉보기엔 쉽게 그림을 복원하는 것으로 보여 훈련된 전문 가의 눈과 손을 모방하는 소프트웨어를 만들기가 까다롭다는 사실을 잊게 만듭니다. 디지털 복원 방법은 손상된 부분 주위의 색상에 관한 정보뿐만 아니라 남아있는 선들과 없어진 선들 사이의 경계가 변하는 방향에 관한 정보 또한 담아 야 합니다. 일부 복원 과정에서는 계산 유체역학을 기반으로 한 기법을 사용하여 알려진 정보가 필요한 부분으로

매끄럽게 '흘러들어 간다'고 보증해 줍니다. 이렇게 계산 유체역학이라는 잘 정립된 분야가 디지털 복원이라는 새로운 분야 에 적용되어 우리가 완전한 그림을 볼 수 있게 해줍니다.

더 알아보기: Filling in Blanks, Ivars Peterson, Science News, 11 May 2002.

- 질병 물리치기
  - 미세한 유전자와 단백질을 모형화하는 것에서부터 한 나라에 퍼져가는 전염병의 진행을 추적하기까지, 수학은 질병에 맞서 싸우는 데에 큰 역할을 합니다. 예를 들면, 감염성 질병의 역학을 분석하는 기본 모형은 연립 미분방정식입니다. '데이터 마이닝'이라는 새로운 분야는 통계학과 패턴 인식을 이용하여 인구의 질병 연구에서 수집한 방대한 양의 정보 속에서 의미 있는 정보를 포착해내는 것을 도와줍니다. 수학 은 사람의 유전자 변이와 특정 질병을 연관 짓는 데에도 핵심적인 역할을 합니다.

  수학은 최근 영국의 구제역 그리고 라틴 아메리카에서 수백만 명이 감염된 샤가스병 과 싸우는데 큰 역할을 했습니다. 구제역을 연구한 전염병학자들은 수학적 모형을 적용하여 재앙을 초래할 수도 있는 이 질병의 확산을 막기엔 초기의 노력이 불충분 했다는 결론을 내렸습니다. 정부는 이러한 결론을 받아들여 일련의 행동을 취하였는데, 극단적이긴 했지만 결국 질병의 폭발적 발생을 저지하였습니다. 라틴 아메리카 에서는 수학자들이 컴퓨터를 이용하여 샤가스병과 맞서는 여러 방안을 실험한 결과, 놀라울 정도로 간단하나 감염 속도를 현저히 줄이는데 매우 효과적인 방안을 찾아 냈습니다. 개를 침실에 들이지 않는 것이었습니다. 이 두 사례 모두에 세 가지 중요 한 특성이 들어 있습니다. 질병의 수학 모형, 모형이 요구하는 계산을 해 줄 현대적 컴퓨터, 그리고 수학 모형을 설계할 통찰력을 지니고 컴퓨터의 능력을 이용할 줄 아는 연구자들이 그것입니다.

  더 알아보기: Infectious Diseases of Humans: Dynamics and Control, R. M. Anderson and R. M. May.

- 컴퓨터의 변혁 일으키기
  - 20여년 안에 컴퓨터 칩이 너무 작아져서 양자역학의 효과들이 우리가 당연시 했던 물리법칙을 대체할 것입니다. 오늘날 우리가 사용하는 컴퓨터는 0이거나 1인 비트를 토대로 하지만, 양자계산의 기본 단위는 동시에 (각각에 확률이 부여된) 0과 1이 될 수 있는 양자 비트(큐비트)입니다.

양자계산이라는 이상한 세상에서 는 큰 숫자를 인수분해하는 것과 같은 복잡한 과정도 관련된 여러 단계를 동시에 계산할 수 있기 때문에 훨씬 빠른 속도로 이뤄집니다. 이 분야를 연구하는 수학 자, 물리학자, 컴퓨터 과학자와 공학자들의 궁극적인 목표는 오늘날의 가장 강력한 컴퓨터로도 수십억 년이 걸리는 문제들을 몇 초 안에 풀 수 있는 양자 컴퓨터 를 만드는 것입니다.

양자 컴퓨터의 능력에는 오늘날의 전자 암호 방법을 깰 수 있는 계산 능력도 포함 됩니다. 이것은 들리는 만큼 그리 걱정스러운 일은 아닌데, 왜냐하면 암호학자들이 이미 시스템을 관찰하면 그 시스템이 변한다는 양자역학의 원리를 이용한 알고리즘을 개발했기 때문입니다. 그리하여, 양자 통신망을 사용하는 이용자들은 통신을 가로채려는 어떠한 시도도 감지할 수 있습니다. 오늘날에는 컴퓨터를 소형화하는데 장벽으로 작용하는 법칙들이 미래에는 컴퓨터 사용에 큰 도움을 제공할 수도 있다는 사실은 아이러니입니다.

더 알아보기: Rules for a Complex Quantum World, Scientific American, November 2002, Michael A. Nielsen.

• 무선으로 전화하기

- 휴대전화는 작으므로 내부에서 상당한 많은 활동이 이루어지고 있다는 것을 잊기 쉽습니다. 전화를 걸면 먼저 발신자의 목소리가 전화기의 프로세서에 의해 0과1 들의 비트열로 전환되어 기지국으로 전송되고, 이 정보들은 다시 수신자의 전화 기로 전달되어 원래의 목소리(실은 그와 아주 비슷한 소리)로 전환됩니다. 이때, 전화기는 목소리와 함께 식별 코드를 전송하고 가장 가까운 기지국을 알아냅니 다. 전화기 위치가 변해도 대화를 끊김 없이 유지하기 위해 핸드오프 알고리즘을 사용합니다. (E.T.는 착륙 후까지 집에 전화하지 않았다는 점을 주목하십시오.)

  전화기가 이동하지 않아도 건물이나 나무와 같은 장애물과 다른 전파 신호 등이 발신과 수신을 방 해합니다. 만약 세상에 단지 휴대전화 한 대와 안 테나 하나만 존재한다면 그 신호의 진폭과 위상 의 변화를 하나의 복소수로 나타낼 수 있겠으나, 이 세상에는 수많은 휴대전화와 안테나가 있으므로 그 모든 변화를 나타내려면 아주 큰 행렬이 필 요합니다. 이 행렬들은 매우 크기 때문에 이것들 로 정확한 계산을 한다는 것은 현실적으로 불가 능하지만 랜덤행렬이론을 통해 성공적으로 모형화되고 있습니다. 이

모형으로 시스템 설계의 최적화를 목표로 시스템 성능을 분석하고 시스템 용량의 한계치를 측정하는 것이 가능합니다. 이러한 새롭고 흥미로운 기술을 통해 휴대전화 한 대가 여러 개의 안테나를 이용하는 광대역 서비스가 이뤄질 수 있습니다.

더 알아보기: The Cell Phone Handbook, by Penelope Stetz.

• 나를 나타내기

- 연구자가 세포에서 활성 (발현) 유전자를 식별할 때 사용하는 최첨단 기술은 마 이크로어레이, 즉 전자회로 대신 DNA로 각인된 “유전자 칩”입니다. 형광표지 된 세포 표본의 활성 유전자들은 칩 위의 DNA와 상보적으로 결합할 때 그 모습이 드러납니다. 이러한 미시적 활동으로 발생하는 정보량은 막대하여, 배열의 한 행에 있는 점이 15,000개에 달할 수 있습니다. 수학을 사용하는 두 분야인 패턴 인식과 이미지 해석은 마이크로어레이 데이터에서 알츠하이머나 파킨슨병을 포 함한 여러 질병의 중요한 유전 정보를 추출합니다. 미래에는 마이크로어레이가 의약품을 개인 맞춤형으로 접근할 수 있도록 해줄 수 있으며, 그래서 의사가 이 런 칩들을 이용하여 질병을 진단하고 개인 고유의 유전자 프로파일에 가장 적합 한 치료를 결정할 수 있을 것입니다.

  의학의 한 분야인 암 연구에서는 배열의 각 열에 있는 점들을 종양 표본의 유전 자 좌표로 생각할 수 있습니다. 하지만 좌표가 너무 많기 때문에 어느 종양들이 유사한가를 결정하기 어렵습니다. 알고리즘은 통계학과 고차원에서의 다양한 거 리 측정 척도를 이용하여 유전학적으로 유사한 종양들을 “클러스터”들로 분류함으로써 클러스터에 대응하는 치료에 대한 실험을 가능하게 해줍니다. 한 사례에서 마이크로어레이 기술은 서로 다른 두 형 태의 백혈병을 구별해냈을 뿐만 아니라 (발견하기까지 35년이 걸렸지만 확인에는 “리턴” 키를 누르는 시간만 필요했습니다), 유사하다고 여겼던 종양들 내에서 서로 다른 클러스터들을 발견하고 임상 시험을 통해서 차이를 확인하였습니다.

  더 알아보기: Gene Chips and Functional Genomics, Hisham Hamadeh and Cynthia A.Afshari, American Scientist, November-December 2000.

• 로봇을 생활 속으로

- 이제 다양한 형태와 크기의 로봇들이 거실 바닥 청소와 같은 일상적인 일뿐만 아니라 대양저의 열수 분출공을 찾아내는 놀라운 일들도 해내고 있

습니다. 기하학, 통계학, 그래프이론, 미분방정식, 선형대수학은 로봇들이 자율적으로 기능하여 우리가 할 수 없거나 하기 싫은 작업들을 대신해 줄 수 있게끔 움직이고 의사 결 정을 할 수 있게 하는 데에 사용되는 수학 분야들입니다.

아래 사진의 로봇은 춤을 출 뿐만 아니라 손님을 맞이하고 목적지까지 안내하면서 뉴스와 날씨를 알려주기도 합니다. 이러한 능력들은 시각, 패턴 인식, 음성 인식을 위한 알고리즘, 그리고 누적된 오류들이 로봇의 성능에 영향을 끼치지 않도록 불확실성을 처리하는 알고리즘들이 필요합니다. 대부분의 연구자는 인간처럼 행동하는 기계를 만들기까지는 오래 걸릴 것으로 생각하지만, 알고리즘을 개선한다면 이미 우주에서, 재난 지역의 구조활동에서, 의사들이 더 정밀하고 덜 침습적인 수술을 위해 로봇 팔을 사용하는 수술실에서 이용되고 있는 로봇의 능력을 개선할 수 있을 것입니다.

더 알아보기: Robots, Ruth Aylett

- 관계 만들기
  - 사회 속의 사람들, 뇌 안의 뉴런들, 인터넷상의 웹 페이지들은 각각의 연결 관계까지 생각하면 모두 네트워크의 실례들이라 할 수 있습니다. 수학자들은 연결의 개수와 분포와 같은 네트워크의 특성을 연구하는데, 그것은 그러한 속성이 네트워크 고유의 본질에 대해 어떤 것을 알려줄지 알기 위함이다. 예를 들어, 아래의 그림 속 색깔 들은 한 교점을 없애는 것이 네트워크(이 경우, 살아있는 세포)에 얼마나 파괴적일 지를 알려줍니다. 이처럼 네트워크의 성질을 발견하고 확인하는 것은 컴퓨터나 인간 모두를 바이러스로부터 지키는 것을 포함하여, 미시적인 수준에서부터 세계적인 수준에까지 이르는 응용에 중요합니다.

    네트워크에 관한 연구로부터 함께 출연한 작품들로 배우들을 연관 짓는 게임[케빈 베이컨(Kevin Bacon) 게임이라 부름]에서 비롯된 “관계의 6 단계 법칙”이라는 문구가 탄생했습니다. 1960년대에 이뤄진 한 실험에서 미국 중서부에서 무작위로 뽑은 100명이 넘는 사람들이 매사추세츠 주의 증권 중개인과 (친구의 친구의 친구 등 등으로) 평균 여섯 단계를 통해 관계가 있는 것으로 밝혀졌습니다. 미국의 절반을 가로지르는 거리에 있는 사람들이 이 정도로 가깝게 연관되어 있다는 이 실험결과는 꽤 놀라웠고, 나아가 훨씬 큰 네트워크도 “작은 세상”일 수 있다는 것을 입증하였 습니다.

오늘날 연구자들은 그래프이론과 확률론에서 나오는 매개변수를 이용하여 네트워크를 해석하며 전력망이든 케빈 베이컨과 연관된 배우들이든 정교한 네트워크들도 결국 "작은 세상"인지 알아내기 위해 네트워크를 분석하고 있습니다.

더 알아보기: "Scale-Free Networks", by Albert-László Barabási and Eric Bonabeau, Scientific American, May 2003

• 교통 체증 피하기

- 기분 탓이 아닙니다. 교통 체증은 날로 심해지고 있습니다. 지난 30년간 차량 및 운행거리는 두 배 이상 늘어난 데에 비해 정작 도로는 고작 6 퍼센트 밖에 증가하지 않았습니다. 그러나 새로운 길을 만든다고 해서 교통 체증이 완화되리라고 보장할 수는 없습니다. 직관에 반하는 교통 과학의 어떤 결과에 따르면 새로운 도로가 실제로는 네트워크의 혼잡을 증가시킬 수 있습니다. 대기행렬이론과 편미분방정식과 같은 수학 분야는 뒤로 전파되는 파동(차는 앞으로 움직이지만 체증 은 뒤로 전파됩니다)인 교통을 이해하는 데에 기여합니다.

  교통에 관한 수학 연구는 비교적 새로운 분야지만 한 연방보고서는 정보혁명, 즉 더 강력한 컴퓨터, 통신, 더 나은 수치 모형의 결합이 자동차나 제트 엔진의 발명 만큼이나 교통에 영향을 끼칠 것이라고 결론지었습니다. 교통 분석에는 (일기 예 보와 같이) 수많은 변수(운전 속도, 운행 거리, 시각, 출발 지점)가 필요하고, 혼 돈이론(도로의 작은 변화가 운행 조건에 큰 지장을 줄 수도 있음)과도 관련이 있습니다. 하지만 날씨와는 다르게 교통은 예보에 반응하여 (현재에는 운전자가, 미래에는 자동차 스스로) 우회 경로를 택하므로 변할 수 있습니다.

  더 알아보기: What's Happening in the Mathematical Sciences, Vol. 5, Barry Cipra

• 우주 기상 예보하기

- 태양에서 발생하는 전자기 교란은 1억 5천만 킬로미터 떨어져 있는 우리에게 보통 은 영향을 미치지 않지만, 강력한 태양 폭풍은 우리의 위성과 전력, 통신에 심각한 결과를 초래합니다. 예를 들어, 1989년도의 태양 폭발은 주전력망을 마비시켜 600만 명의 캐나다인들에게 전기가 공급되지 않는 사태를 가져왔습니다. 우주 기상 예보관은 현재 더 나은 수학적 모형을 이용하여 태양 활동과 그 영향에 대한 통계적 예측을 할 수 있습니다.

이러한 예측은 기술의 발전에 따라 개선되었지만 새로운 수학과 모형의 개선이 없었다면 가장 성능이 좋은 컴퓨터조차 우주 공간에서 길을 잃었을 것입니다.

우주 기상 모형은 맥스웰의 전자기방정식, 유체 흐름 방정식 등에 근거하는데, 복잡하기 때문에 수치로 계산할 수밖에 없습니다. 새로이 쏘아 올린 위성들은(정사 면체 대형을 유지하여 우주 기상 영상을 제공하는 네 위성을 포함합니다) 우주 환경 이해에 필요한 정보를 제공해 주고 현대 편의 시설에 가해질 수 있는 교란을 미리 경고해 줍니다.

더 알아보기: Storms from the Sun, Michael J. Carlowicz and Ramon E. Lopez

- 길 따라가기
  - 순회 외판원 문제란 지정된 도시 각각을 정확하게 한 번씩 지나는 가장 짧은 경로 를 찾는 문제를 말합니다.(아래 경로는 13,000개 이상의 도시를 방문합니다.) 이 문제는 도시의 수에 따라 기하급수적으로 복잡성이 증가 한다는 사실과, 전자 칩의 배선에서부터 항공사 직원들의 일정 결정에까지 널리 응용된다는 사실 때문 에 주목할 만합니다. 연구자들은 그래프이론과 선형계획법을 사용해 정확한 해답 이 존재하는 상황에서는 그 해답을 찾고 그렇지 않은 상황에서는 최적에 준하는 경로를 찾아 산업체에서 시간과 비용을 절약하게 해줍니다.

    순회 외판원 문제에는 활용할 수 있는 일반해가 없을 수도 있습니다. 그런데 최선 의 해답을 알지 못한다 해도 수학자들은 주어진 경로가 최적 경로에 얼마나 가까운가를 계산할 수 있습니다. 어쩌면 더 놀라운 것은 25,000개의 도시로 구성된 지도에서 현재의 알고리즘을 적용하면 최단 경로와 불과 0.01%밖에 차이가 나지 않는 경로를 설계할 수 있다는 사실입니다.

    더 알아보기: The Traveling Salesman Problem: A Guided Tour of Combinatorial Optimization, Lawler, Lenstra, Rinnooy Kan, and Shmoys.

- 세포 열어 보기
  - 세포의 개별 메커니즘들이 신비로운 만큼이나 세포가 수행하는 작용 또한 경이롭습니다. 분자 생물학자와 수학자들은 모형을 통해 세포 분열, 운동, (세포 내 부 및 세포들 사이의) 통신과 같은 활동들을 이해하기 시작했습니다. 세포를 분 석하는 데는 다양한 수학 분야가 필요한데 그 이유는 세포

활동을 설명하는 데에 는 미분방정식에 기반을 둔 연속 모형과 그래프이론 등을 이용한 이산 모형을 조 합해야 하기 때문입니다.

어쩌면 놀랍게도 세포 기능은 신호 경로, 게이트, 스위치, 피드백 루프를 갖춘 복잡한 회로 배선도들로 묘사될 수 있습니다. 연구자들은 이 배선도들을 방정식들 로 변환하는데, 그것들을 대개 수치적으로 풉니다. 이 방정식들을 푸는 것은 해 를 분석하고 모형을 개선하고 방정식을 새로 만들어 다시 그 해를 찾는 과정의 일부일 뿐입니다. 이 과정을 여러 번 반복해야 할 수도 있습니다. 이 과정의 목표 는 세포 활동을 정확히 묘사하는 것으로, 그렇게 하면 오늘날의 전자 회로를 정밀하게 설계하듯이 약품과 치료도 정밀하게 설계할 수 있습니다.

더 알아보기: Computational Cell Biology, Christopher P. Fall, Eric S. Marland, John M.Wagner, and John J.Tyson, Editors.

• 더 또렷하게 보기

- 별이 반짝이는 것은 동요 주제로는 재미있어도 천문학자에게는 골칫거리입니다. 현대 기술은 적응광학을 이용해 대기의 난류를 보정하여 항성, 행성, 위성들의 정확한 사진을 얻어냅니다. 대기 왜곡을 수정하는 데는 왜곡의 정도를 계산하고 변형 가능한 거울을 지속적으로 조작하여 광파를 바른 경로로 다시 유도하기 위해 선형대수학, 기하학, 통계학을 이용합니다.

수학적 알고리즘 때문에 지구 너머 혹은 현미경 아래서 또렷이 보는데 필요한 실시간 계산이 가능합니다. 사실, 적응광학 덕분에 연구자들은 살아있는 눈의 세포를 처음 볼 수 있었습니다. 이로 인해 더 나은 진단과 더 정밀한 수술이 가능해졌습니다. 그래서 소수의 사람이 소수의 것들을 명확하게 보게 하도록 고안된 학문 이 수백만 명이 모든 것을 더 잘 볼 수 있게 할 수 있습니다.

더 알아보기: Adaptive Optics in Astronomy, François Roddier.

• 스팸 메일 걸러내기

- 이메일 사용자는 마치 깜짝 식사 대접을 받는 사람처럼 묻습니다. 누가 스팸 메일을 시켰지? 답은 '아무도 시키지 않았어'이지만 되돌려 보내면 더 많은 스팸 메일을 받을 뿐입니다. 사람들은 메시지에서 스팸 메일의 징후를 찾아내는 필터를 포함하여 여러 가지 새로운 도구를 이용하여 스팸 메일에 대응하고 있습니다. 하지만 스팸 메일 을 보내는 측은 단어들과 메시지의 의도를 위장하여 간단한 필터들은 손쉽게 피합니다. 새롭고 더욱 정교한

필터 시스템은 수학을 사용하여 스팸 메일을 인지하는 훈련을 반복하고, 그래서 서버로 하여금 사용자가 원하는 것을 제공할 수 있게 합니다.

스팸 메일을 보내는 이들은 많은 스팸 방지 도구들을 피하도록 메시지를 바꾸지만, 베이즈(Bayes)의 정리라고 알려진 수학적 결과를 이용하면 도구 역시 개선될 수 있 습니다. 사용자는 매일 자신의 메일을 확인하면서, 필터링된 이메일 중 어떤 것이 실제로는 스팸인지 표시합니다. 지속해서 훈련된 필터는 이메일이 스팸이라면 특정 단 어나 특징들이 어느 정도 있을지 알게 됩니다. 베이즈의 정리를 쓰면 필터가 이러한 정보를 이용하여 그러한 단어들과 특징들이 있는 메시지가 스팸일 확률을 계산할 수 있습니다. 이는 오래된 기본적 수학 결과를 효과적으로 응용한 사례입니다. 수학자 들은 새롭거나 기존에 있던 수학적 도구들을 사용하여 스팸 메일을 제거할 수 있는 혁신적인 기술을 끊임없이 연구하고 있습니다.

더 알아보기: “Math 1, Spam 0,” Dana Mackenzie, SIAM News, November, 2003.

- 위치 파악하기
  - 원래 군용으로 설계된 위성 위치확인 시스템(GPS)은 오늘날 보트이용자, 운전자, 등산객에게 몇 미터 이내로 자신들의 위치를 짚어줍니다. GPS의 기능 대부분은 산술, 대수학, 기하학에서 유도됩니다. 발신 위성에서부터 GPS 수신기까지 신호가 도달하는 시간으로 둘 사이의 거리를 알 수 있어, GPS 사용자는, 위성을 중심으로 한 가상의 구면 위에 놓입니다. 다른 위성들을 사용하여 유사한 계산이 동시에 이루어집니다. 위성들과 수신기 시계의 차이를 보정하고 나면, GPS 사용자의 위치는 세 구면의 교점들 중 하나가 되는 것입니다.

  GPS의 기본 원리는 간단하지만, 10,000마일 이상 떨어져 있는 위성을 이용해서 위치를 계산할 때 오차를 줄이는 것은 그리 간단하지 않습니다. 정보이론은 약한 신호(텔레비전이 수신하는 신호의 10억 분의 1 이하)로부터 신뢰할 만한 데이터 를 추출하고, 대기권의 수리 모형은 신호가 지상으로 각기 다른 대기층을 지날 때 미세하게 달라지는 속도의 의미를 설명하여 줍니다. 정밀 GPS(Differential GPS)는 정확한 위치를 아는 지상의 수신기를 사용하여 오차를 더욱 감소시킵니다. 언젠가는 실시간 GPS가 불과 몇 인치의 오차로 정확해져 시계가 제로인 상태에서도 자동차를 안내하고 비행기를 착륙시킬 수 있을 것입니다.

더 알아보기: " Retooling the Global Positioning System," Scientific American, Per Enge, May 2004.

- 종양 겨냥하기
  - 암을 발견하고 치료하는 기술은 날로 진보해왔으나 아직 의사들이 원하는 만큼 정확하진 않습니다. 예를 들어, 종양은 수술 전 진단 시점에서 처치 시점 사이에 모양과 위치가 바뀔 수 있어서 이미 이동해 버린 목표에 방사선을 겨냥할 수도 있습니다. 기하학, 편미분방정식, 정수 선형프로그래밍은 실시간으로 데이터를 처리할 때 사용하는 수학의 세 분야입니다. 그렇게 얻은 데이터를 통해 의사는 건강한 조직에 최소한의 피해를 주는 동시에 종양에는 최대의 손상을 입히는 방안을 계획합니다.

    바이러스를 이용하여 암세포를 파괴하는 바이러스 요법은 유망한 탐구 분야입니다. 연구자들은 수학적 모형을 통해 바이러스를 가장 유용하게 사용하는 방법을 찾아냅니다. 이 모형들은 각각의 가능성에 대한 수치적 결과를 제공함으로써 성 공하지 못할 접근은 배제해주고 차후 실험에 적합한 후보를 식별하여 줍니다. 시뮬레이션 실험으로 항 HIV 칵테일을 개발하기도 했다는 것은 연구실 실험과 임상 시험만으로 할 수 있는 것보다 빠르고 저렴하게 좋은 의약품을 개발할 수 있음을 의미합니다.

    더 알아보기: “Treatment Planning for Brachytherapy,” Eva Lee, et al, Physics in Medicine and Biology, 1999.

- 더 나은 스포츠 만들기
  - 저항이 적은 유니폼을 디자인하는 것에서부터 투창 선수가 창던지는 각도를 조절하는 것까지 수학은 운동 성과 향상에 도움을 줍니다. 방정식의 정확한 해를 찾을 수 없을 때 수치해석학이 도움이 되는 것처럼 미분방정식과 벡터해석학은 스포츠의 최적 역학을 결정하는 데에 중요한 역할을 합니다. 다양한 수학 분야가 선수들 이 정신과 신체를 더 빠르고 더 높게 나아가게 해주는 적절한 도구를 제공합니다.

    수학은 스포츠를 관람하고 코치하는 것 또한 향상시켜 줍니다. 텔레비전 화면에 겹쳐 보이는 퍼스트 다운 표시 줄과 스트라이크존은 기하학 뿐만 아니라 경기장 과 카메라의 위치와 시각적 데이터를 처리하는 알고리즘을 필요로 합니다. 코치 하는 데에 있어서는, “며칠 휴식하는 것이 투수에게 최적인가?” 혹은 “네 번째 공격에서 모험을 하는 것이 득이 되는 것은 어떠한 상황인가?”와 같은 문제를 분석 하는 데에 통계학과 게임이론을

사용합니다. “우리는 신을 믿습니다. 나머지 모든 것에는 데이터가 있어야 합니다”라고 말한 코치도 있습니다.

더 알아보기: The Mathematics of Projectiles in Sport, Neville de Mestre

- 음성 인식하기
  - 현재 음성 인식 시스템은 받아쓰기나 주소록 조회 같은 비대화 상황에서 상당히 잘 실행됩니다. 이런 응용이 인상적이지 않을 수도 있지만 악센트와 억양, 잠시 멈춤을 고려할 때 그런 단순한 상황에서도 음성 파형을 정확한 단어들로 변환하려면 정교한 기술이 필요합니다. 조건부 확률과 관련 있는 ‘숨은 마르코프 (Markov) 모형’이라는 수학 모형이 가장 일반적인 기법인데 후보가 되는 소리 를 훈련시켜 주어진 입력에 가장 합치하는 것을 찾습니다.

    기계에 음성으로 명령하는 것은 지금은 비용이 많이 들지만 입력 장치들이 너무 작아지면 불가피해질 것입니다. 연구자들은 잡음을 걸러내고 일상적인 대화를 이해하고 사람이 달라져도 적응할 수 있는 새로운 수학적 모형과 (아마도 통계 학이나 기계 학습을 이용한) 알고리즘을 찾고 있습니다. 이 문제의 해법을 찾는 것은 어렵지만, 일단 찾는다면 여러분의 목소리가 여러분의 키보드, 마우스, 무엇보다도 수많은 리모컨을 대체할 날도 그리 멀지 않을 것입니다.

    더 알아보기: Speech Processing: A Dynamic and Optimization-Oriented Approach, Li Deng and Douglas O’Shaugnessy, 2003.

- 데이터 압축하기
  - 10,000피트 이상의 테이프가 필요했던 영화들은 이제 디지털화되어 지름이 5 인치도 안 되는 디스크에 모두 저장됩니다. 디지털화의 중요한 부분은 데이터 압축으로, 큰 파일을 작은 파일로 변환하고, 변환된 파일로부터 원본(혹은 그에 가까운 근사본)을 복구시킬 수 있게 합니다. 선형대수학, 확률론, 그래프이론, 추상대수학 등이 DVD나 HDTV, 대용량 데이터베이스와 같은 현대 기술을 가능하게 만든 다양한 압축 알고리즘의 기초가 된 수학 분야들입니다.

    한 가지 기술로 모든 매체의 압축 요구조건을 만족시키기는 어렵습니다. 예를 들어 비교적 새로운 수학 도구에 바탕을 둔 웨이블릿(wavelet) 압축 방법은 이미지와 오디오 파일에는 효율적이지만 텍스트 파일에는 그렇지 않습니다. 무엇에 응용되든 압축 알고리즘은 저장과 전송을 더 효율적으로

하기 위해 데이터의 중 복성과 관련성을 이용합니다. 그러면 다음은 압축이 잘 될까요?

더 알아보기: Introduction to Data Compression, Khalid Sayood, 1996.

- 깨어진 조각 맞추기
  - 막 깨어진 조각들을 끼워 맞추는 일도 매우 어려운데, 몇 세대의 문명을 거친 수 천년 후에 한다고 상상해 보십시오. 유적에서 수십만 개의 조각에 마주친 고고 학자들은 이 조각들을 다시 조립하는 과정에서 수학자들의 도움을 빌립니다. 먼 저 조각들을 디지털로 스캔합니다. 그다음 소프트웨어가 기하학, 조합론, 그리고 통계학을 이용해 설사 많은 부분들이 유실되었어도 고대 유물들을 재건해 냅니다.

    묻혀 있는 난파선의 정밀한 지도를 제작할 때나 공룡의 움직임을 재현할 때와 같은 고고학과 고생물학의 새로운 접근에도 수학이 사용됩니다. 이러한 경우들에서는 어쩌면 역설적이게도 앞으로의 진보가 실제로는 과거를 이해하는 데 더 가까이 가게 해줍니다. 삼각 측량과 같은 기본적인 기법을 개선하는 것이든 혹은 편미분방정식과 같은 관련 분야를 적용하는 방식으로든, 수학자들은 고대의 비밀들을 밝혀내는 데에 있어 새로운 경지를 개척하고 있습니다.

    더 알아보기: “Automatic Archaeology,” Haim Watzman, Nature, January 8, 2004.

- 안 보이는 것 스캔하기
  - 한 물체에 일정한 범위 안에서 여러 각도로 저선량의 X-선을 쏘인 후 X-선 흡수 량을 측정하는 방법으로 컴퓨터단층촬영(CAT)은 기존의 X-선이 제공할 수 없는 정확한 이미지를 제공합니다. 다변수미적분학과 20세기 초에 발명된 라돈 (Radon) 변환이라 알려진 수학적인 도구는 1차원 직선들을 따라 수집한 정보에서 3차원적인 이미지를 효율적으로 복원하는데 필수적입니다. 이 효율적인 복원 방법 때문에 X-선에 덜 노출되고도 더 나은 영상을 얻을 수 있어 의사와 환자 모두에게 이롭습니다.

    컴퓨터단층촬영에 사용하는 것과 동일한 수학적 원리는 쌍성들과 빠르게 자전하는 별들의 표면에 대한 이미지를 전에 볼 수 없었던 높은 해상도로 제공하는 천체 단층촬영이라는 분야에서도 사용됩니다. 천체단층촬영에서는 별의 자전이나 별의 쌍이 촬영 기기의 회전을 대체하고, 위치와 속력은 그 별들에서 검출된 방사선을 이용하여 얻습니다. 이렇게 컴퓨터단층촬영

기술보다 훨씬 전에 발견된 수학은 인 체 내부에서부터 우리 태양계를 훨씬 넘어선 곳 까지를 상세히 보게 하여 줍니다.

더 알아보기: Mathematical Methods in Image Reconstruction, F. Natterer and F. Wübbeling.

- 디자인을 현실로 만들기
  - 시드니 오페라 하우스의 혁신적인 디자인은 구면 하나에서 잘라낸 구면삼각형들로 프로젝트의 설계 사양을 충족시킬 수 있다는 것을 깨닫기 전까지는 수년 동안 많은 건축가를 좌절하게 하였습니다. 모든 조각이 모양이 동일하고, 잘 알려진 기하학적 특성을 가진 곡면에서 나왔기 때문에 (구조적 힘을 측정하는 것과 같은) 필요한 계산은 크게 단순화되었고 꿈은 근사한 현실이 되었습니다.

    컴퓨터 이용 설계(CAD)와 그 뒤에 숨은 수학 때문에 대담한 계획에 따르는 많은 계산이 가능합니다. 건축가와 공학자는 복잡한 형태를 다각형과 (특성을 아는) 단순한 곡면들의 연속으로 모형화하여 설계의 구조적인 성질들을 결정할 수 있 습니다. 한때 복잡성을 고려하여 일률적으로 선택되었던 대형 건물의 요소들이 오늘날에는 그의 설계자들만큼이나 개성을 갖게 되었습니다.

    더 알아보기: Mathematical Tour through the Sydney Opera House, The Mathematical Intelligencer, Joe Hammer, Fall 2004.

- 물 튀기기
  - 물, 빛, 음악이 어우러진 현대의 분수는 매혹적인 볼거리이며, 수학은 그 매혹적 마술의 한 부분을 담당합니다. 기하학은 분수의 전반적인 설계에 사용되고, 수학 적 모형은 액체 입자들 간의 상호작용을 모사하고, 강력한 알고리즘은 독특한 쇼의 수많은 장면이 순서대로 잘 진행되도록 수천 개의 밸브와 조명을 조율하는 소프트웨어를 구동합니다.

    분수의 물이 그토록 정확하게 움직이는 것은 모든 물의 입자가 동일한 속도로 서로 평행하게 움직이는 층류(層流)의 흐름을 이용한 결과입니다. 유체 동역학의 복잡한 수학적인 분석으로 물이 계단을 오르게 하거나 구슬들로 이루어진 것처 럼 행동하게 하는 것과 같은 묘기들이 가능해졌습니다. 그 결과는 경이로우며 효율적입니다. 120cm 정도 높이의 물기둥이라면 보통의 물컵을 채우지는 못할 것 입니다.

더 알아보기: Inventive Artist Sculpts in Water, USA Today, Bill Meyers, March 14, 1999.

- 당신의 마음을 읽는다?
  - 요요 크기의 이 작은 물건이 어떻게 스무고개를 맞출까요? 성공적으로 맞추면 사람들은 자신의 마음을 읽혔다고 생각하기 쉽지만 사실은 그렇지 않습니다. 이 정교한 장난감은 확률론과 퍼지이론, 행렬과 같은 수학을 이용하여 여러분이 생각하는 동물이나 식물, 광물을 75% 이상의 성공률로 맞출 수 있습니다.

    이 게임의 온라인 버전은 인공 지능, 더 정확하게 말하자면 신경 네트워크의 한 종류로 피드백 루프와 가중치를 이용해 추가 정보를 얻을 때마다 “학습”합니다. 이 경우 대답들에 가중치를 부여하는데 (“모름”에는 0의 가중치를 줍니다), (온라인 게임에서는) 필요에 따라 각 게임이 끝날 때마다 그 가중치가 조절됩니다. 이 가중값들을 모아 물건은 행이고 질문은 열인 행렬을 만듭니다. 이 게임기는 먼 저 어느 물건이 여전히 해답일 가능성이 있는지 보고, 남아있는 후보들에 대해 가 장 바람직한 가중값들의 집합을 갖는 질문이 무엇인지를 찾아 다음 질문을 선택 합니다. 가장 바람직한 가중값들의 집합은 무엇일까요? 죄송합니다. 이 질문은 예 아니오 질문이 아닙니다.

    더 알아보기: AI on the Web, Monitor Magazine,Tanis Stoliar, April, 1999.

- 효율적으로 짐 싸기
  - 일정한 크기의 상자 안에 물건들을 넣는 것은 (여러분이 여행 짐을 싸는 것이 아니라면) 그다지 중요하지 않아 보이지만, 상자 채우기라는 주제는 트럭에 짐을 싣는 전통적인 문제와 마찬가지로 컴퓨터의 메모리 블럭을 배정할 때나 항공사 항공편의 일정을 정하는 상황까지도 포함합니다. 연구자들은 정수론과 기하학, 확률론과 같은 여러 수학 분야를 이용하여 시간과 저장소를 (물리적이든 전자적 이든) 가장 효율적으로 사용하도록 짐을 싸는 방법을 연구합니다.

    수학자들은 상자 채우기 문제가 “복잡한” 문제임을 증명했으며, 모든 채우기 문 제에 대해 최적 해를 얻는 실용적인 알고리즘은 없을 수도 있습니다. 그러나 “빠른” 일반해가 결코 존재하지 않을지라도, 수학자들은 산업계가 시간과 비용을 절 약할 수 있게 채우기 알고리즘을 개선하기 위해

노력합니다. 그 결과 중 하나는, 가장 단순한 알고리즘에 속하는, 제일 큰 짐부터 싣는 것이 최선의 방법과 항상 20% 이내로 비슷하다는 것을 보여줍니다.

더 알아보기: Approximate Solutions to Bin Packing Problems, Coffman, E. G., Jr., J. Csirik, and G.Woeginger, Handbook of Applied Optimization, P. Pardalos and M. Resende, eds., 2002.

- 번역하기: 아랍어에서 줄루어까지
  - (예를 들어, 인터넷 상에서) 현재의 문서 발생량은 인간이 번역할 수 있는 한계를 훨씬 넘어서고 있어 기계 번역을 불가피하게 만듭니다. 기계 번역기는 좋은 번역을 효율적으로 얻기 위하여 확률론, 통계학, 그래프이론을 수많은 언어로 이루어 진 수억 개의 단어와 어구의 데이터베이스와 결합하여 이용합니다. 따라서 흔히 보편 언어라 불리는 수학이 수많은 언어 사이의 가교가 되는 것입니다.

    일단 문서가 번역되면 그다음 질문은 '번역이 얼마나 잘 되었는가' 일 것입니다. 번역 효율성에 대한 수치적 측도들은 이 부분의 과정까지 자동화하여 시간과 비용을 절약할 수 있게 합니다. 측정 결과들은 번역 알고리즘의 향상으로 이어져 마침내 컴퓨터 번역과 관련한 유명한 일화, "'The spirit is willing but the flesh is weak(마음은 굴뚝같은데 몸이 안 따라준다)'를 러시아어로 번역하고 다시 영어로 번역하면 'The vodka is good but the meat is rotten(보드카는 좋지만 고기 는 썩었다)'가 된다" 는 도시 전설은 계속 전설로 남을 것입니다.

    더 알아보기: Machine Translation in the Year 2004, Kevin Knight and Daniel Marcu, http://www.isi.edu/~marcu/papers/mt-icassp2005.pdf.

- 우주 속 길찾기
  - 아래의 "튜브"들은 우주선이 훨씬 적은 연료로 여행할 수 있는 저에너지 통로를 그린 것입니다. 최근 이 통로들을 발견하여 이전에 불가능했던 임무가 실현 가능 성이 생겼습니다. 우주여행의 많은 부분은 미적분학, 삼각법, 벡터해석학에 근거하지만, 이 통로들의 존재는 동력학계라 부르는 수학 분야를 태양과 근접 행성들 및 위성들의 중력 간의 상호 작용에 적용하여 유도한 것입니다.

    두 천체 간의 힘과 궤도는 비교적 직접 계산할 수 있지만, 둘 이상의 천체들의 궤도들을 이해하려면 동력학계와 혼돈이론이 필요합니다. 둘을

넘는 천체로 확장 한 것 중 가장 간단한 경우인 삼체(三體)문제조차도 구체적인 일반해가 없다는 것이 증명되었습니다. 그러나 몇몇 특별한 경우에는 해가 발견되어 탐사 임무 계획 뿐만 아니라 지금은 원자물리학에서 야기된 전자들의 움직임 연구에도 사용됩니다. 그렇게 수학은 우주 여행을 위한 새로운 항로를 찾고, 원자와 우주 간의 연결고리도 찾아내고 있습니다.
더 알아보기: Ground Control to Niels Bohr: Exploring Outer Space with Atomic Physics, Mason A. Porter and Predrag Cvitanovi □ Notices of the American Mathematical Society, October, 2005.

• 더 빨리 탑승하기
  - 비행기에 탑승하기 위해 줄을 서서 기다리는 것은 성가실 뿐만 아니라 비용이 듭니다. 지상에서 추가로 드는 시간으로 인한 항공사의 수익 손실은 매해 수백만 달러에 이릅니다. 다양한 탑승 절차들에 대한 연구에서 로렌츠기하학과 랜덤행렬 이론과 같은 수학을 사용하여 지정석이 없는 탑승은 빠른 방법이지만 뒤에서 앞으로 탑승하는 것은 매우 느린 방법임이 입증되었습니다. 실제로 수학 모형은 승객들이 마구잡이로 자신의 지정석에 탑승하는 것이 차례대로 뒷좌석부터 타는 것보다 시간이 더 적게 든다는 것을 보여줍니다.
    비행기에 탑승할 때 개인 전략을 세우는 것도 만만치 않지만, 좌석 사이의 거리, 가방의 개수, 승객들의 허리 굵기와 같은 변수에 좌우되는 일반해를 모형화하는 것은 훨씬 더 복잡합니다. 그래서 연구자들은 자신들의 이론적인 분석이 몇몇 항 공사에서 시행한 시뮬레이션을 뒷받침한다는 사실을 발견하고 기뻐했습니다. 연구에서 추가로 얻은 보너스는 탑승 문제에 사용되는 수학이 디스크 드라이브의 데이터 입출력 요구를 개선시킬 때 사용하는 수학과 유사하다는 것입니다. 한 가 지 분명한 차이는 데이터는 추가로 짐을 실으려 하지 않는다는 것입니다.
    더 알아보기: Plane Geometry: Scientists Help Speed Boarding of Aircraft, Nicholas Zamiska, The Wall Street Journal, November 2, 2005.

• 범죄 해결하기
  - CBS에서 방영한 NUMB3RS는 매주 범죄를 해결하고 예방하는 현대 수학과 수학자 들을 보여줍니다. 이 시리즈는 허구이지만 많은 에피소드가 실화를 바탕으로 하고 있습니다. 사실 통계학과 조합론, 그리고 그래프이론은 현실 속 수사관들이 실제 범죄를 해결할 때 사용하는 수학입니다.

수학이 범죄를 해결하는 매우 인상적인 방영분은 알고리즘이 이전 범죄 장소들에 근거하여 연쇄 살인범의 현 위치를 정확하게 지적했던 사건에 관한 것이었습니 다. 하지만 DNA 샘플이 그 지역에 사는 모든 용의자들과 맞지 않자 당연히 수학 이 부적절했다는 의심을 낳았습니다. 그러다가 어떤 단서로 인해 수사관이 (예비 검사라는 직업 때문에) 혐의에서 벗어나 있던 사람에 이르게 됐고, 그가 목표 지역에 살았던 것이었습니다. 그는 결국 검거되어 유죄선고를 받음으로써 범죄는 보상받지 못하지만 가정을 점검하는 것은 보상받는다는 것을 증명하였습니다.

더 알아보기: The Hound of the Data Points, Bruce Grierson, Popular-Science, April 2003.

- 폭풍 해일 예측하기
  - 때로는 폭풍 해일이 태풍에서 가장 파괴적입니다. 해일을 예측하는 수학적 모형 은 해안 해양 및 인접한 범람원의 기하학적 구조 및 지형과 함께 바람, 기압, 조 수, 파도, 강의 흐름의 영향들을 결합시켜야 합니다. 유체역학의 방정식들이 물 의 움직임을 기술하지만, 잠재적 홍수 발생 지점을 더욱 정확하게 예측하려면 거의 대부분 거대한 연립방정식을 수치해석으로 풀어야 합니다.

    해안이나 그 근처의 자세한 기하학적 구조와 지형을 모형화하는 데는 매우 높은 정확성이 필요하지만, 심해의 넓게 트인 지역 등은 대개 비교적 낮은 해상도로도 가능합니다. 따라서 모든 지역에 동일한 척도를 사용하면 너무 정보가 많아 비실용적이거나, 너무 정보가 적어 가장 중요한 문제인 해안 범람원을 잘 예측하지 못함을 의미합니다. 연구자들은 대양에서 해안과 내륙까지 정보를 결합할 수 있고, 관련 지역에 따라 가변적인 비정형 격자를 사용하여 문제를 해결합니다. 이렇게 만든 모형을 남부 루이지애나에서 일어난 과거 폭풍에 적용했을 때 매우 정확하였으며 그 지역에서 더 효율적이고 안전한 방파제를 디자인하는 데에 사 용되고 있고 모든 해안 지역의 안전을 평가하는 데 사용하고 있습니다.

    더 알아보기: A New Generation Hurricane Storm Surge Model for Southern Louisiana, by Joannes Westerink et al.

- 석유 탐사하기
  - 석유 가격은 높긴 하지만, 작업을 더욱 효율적이고 청정하게 하는 현대의 원유 탐사 기술이 없었다면 더 높을 것입니다. 유정 하나를 시추하는 데

2천만 달러가 들 수도 있으므로 지금은 시추 지점을 정하는 데 직감보다 유층의 수학적 모형에 의존합니다. 이 모형을 써서 지하로 음파를 쏘아 수집한 데이터와 그 결과 나오 는 비선형연립방정식에서 유층의 특성을 추정합니다. 실제로 한 석유회사는 매 일 비선형연립방정식을 약 250,000개 이상 푼다고 추정합니다.

유층 시뮬레이션이 유체의 흐름을 나타내는 편미분방정식들과 수 테라바이트의 데이터에서 유도되지만, 여전히 상당히 많은 불확실성이 포함되어 있습니다. 연구자들은 통계학을 사용하여 포함된 불확실성을 계량화하여 기획자들에게 침투 성과 같은 지하 속성들을 더 잘 설명해주는 모형을 제공합니다. 그러나 한 가지는 확실합니다. 미래의 에너지 수요에 부응하는 새로운 에너지원을 찾는 것은 수 리과학의 발전에 끊임없이 의존할 것입니다.

더 알아보기: In Pursuit of Better Models and Simulations, Oil Industry Looks to the Math Sciences, Béatrice Rivière and Lea Jenkins, SIAM News, January 2002.

• 파워 라인 드러내기
  - 의회의 의원들 전체가 표결하기는 하지만, 중요한 논의의 상당수는 위원회에서 이루어집니다. 그래프이론과 선형대수학은 알려진 부위원회와 위원회의 수준을 넘 어선 의회의 조직(위원회들의 모임)의 수준을 밝혀낸 두 수학 분야입니다. 어떤 위원회 간의 강한 연관 관계는 구성원을 조사하여 포착할 수 있다는 것에 근거한 결과인데 수학적 분석으로 드러나기 전까지는 사실상 알지 못했던 것이었습니다.

    또한 수학은 의원들의 투표 기록에도 적용되었습니다. 각 의원의 기록은 큰 쪽 크기가 총 투표수(하원의 경우 대략 1000)인 행렬로 표현되었습니다. 연구자들은 고윳값과 고유벡터를 사용하여 연구자들은 의회의 총 투표 기록들을 어떤 2차원 공간으로 대단히 잘 근사할 수 있음을 보였습니다. 그러므로 거의 모든 경우, 예를 들어 법안의 통과 여부를 두 좌표에서 얻어낸 정보로 예측할 수 있습니다. 따라서 워싱턴 정가의 일부 중요한 값들은 사실 고윳값인 셈입니다.

    더 알아보기: Porter, Mason A; Mucha, Peter J.; Newman, M. E. J.; and Warmbrand, Casey M., A Network Analysis of Committees in the United States House of Representatives, Proceedings of the National Academy of Sciences, Vol. 102 [2005], No. 20, pp. 7057-7062.

- 스타일 찾아내기
  - 수학은 숫자와 무식한 계산이 전부가 아닙니다. 그 안에는 상당한 예술성과 우아함이 깃들어 있습니다. 그래서 수학이 예술가들의 스타일을 분석하고 작자가 누구인지 논쟁이 있는 작품들의 작가를 결정짓는 데에 도움을 주는 것은 자연스럽습니다. 사용하는 단어에 대한 통계학에 근거하여 스타일을 분석하려는 노력은 문학에서 시작되었으며, ‘연방주의자 논집’의 일부와 같이 논란이 되던 문서들의 저자들을 성공적으로 식별하였습니다. 하지만 최근까지 회화는 계량화하기 어려웠습니다. 잭슨 폴락(Jackson Pollock)의 회화의 경우 단순하고 무작위로 페인트를 떨어뜨린 것과는 구별되며, 프랙털 차원이 1과 2 사이인 복잡성을 보여줍니다.

    회화의 디지털 사진들을 분석하는 한 연구팀은 현대의 수학적 변환인 웨이블릿(wavelet)을 이용하여 16세기 대가의 회화 모음집의 특성을 계량화 하였습니다. 이 분석으로 진품과 모조품이 각각 군집을 이루어 측정 가능한 차이가 드러났습니다. 비전문가들 및 그들이 만든 모형으로서는 인상적인 성과인데, 연구팀은 자신들 의 연구가 수학 자체와 마찬가지로 인간을 대체하기 위해서가 아니라 돕기 위해 고 안된 것이라고 이야기합니다.

    더 알아보기: The Style of Numbers Behind a Number of Styles, Dan Rockmore, The Chronicle of Higher Education, June 9, 2006.

- 게임하기
  - 비디오 게임은 상당히 재미있지만 수학이 없었다면 덜 재미있었을 것입니다. 기하학과 미적분, 선형대수학은 게임 속 캐릭터, 장면, 움직임들을 만들고, 덜 평면 적이고 사실적으로 보이게 합니다. 어떤 게임회사 임원의 말처럼 수학을 배워나 가는 것은 비디오 게임에서 점차 어려워지는 단계들을 헤쳐나가는 것과 유사합니다. 그래서 졸업할 때 쯤이면 세계를 구할 능력을 갖게 될지 누가 알겠습니까?

    캐릭터의 움직임 중 많은 부분이 역(逆)운동학을 사용합니다. 예를 들어, 캐릭터가 뛸 때 발, 종아리, 허벅지 사이의 각도는 몇 도이어야 할까요? 현실에선 명백하지 만 비디오 게임에서는 구체적으로 계산해야 하는 이 문제는 충돌 및 접촉 인지와 관련된 중요한 연구 분야입니다. 이러한 문제들의 해는 무한히 많지만, 고속 알고리즘은 게이머가 “다리뼈는

엉치뼈에 연결되어 있어”라고 하기 전에 빨리 실질적 인 해답을 찾아내야 합니다.

더 알아보기: Essential Mathematics for Games and Interactive Applications, James Van Verth and Lars Bishop, 2004.

• 음악 지도 만들기

- 수학과 음악은 오랫동안 밀접하게 연관되어 왔습니다. 최근 (기하학의 한 일반화 인) 위상수학을 사용한 어떤 획기적인 연구에서는 화음을 뫼비우스 띠처럼 꼬이 고 자신 위로 접히는 오비폴드(orbifold)라는 공간의 점으로 표현합니다. 한 옥 타브 차이 나는 두 음처럼, 어떻게 보면 멀고 어떻게 보면 가까운 소리들을 이 공 간에서 동일시한다는 점에서 음악적으로 이치에 맞는 표현법입니다.

  이런 최근의 통찰은 어떤 형태의 음악이든 분석할 방안을 마련해 줍니다. 서양음 악의 경우, 듣기 좋은 화음들은 오비폴드의 중심 근처에 자리잡으며 듣기 좋은 선율들은 가까이에 위치한 화음들을 연결하는 경로들입니다. 그러나 음악과 좌표기하학의 새로운 연관성에도 불구하고 음악은 단순히 점들을 잇는 놀이가 아닙니다. 덧셈과 곱셈이 수학의 전부가 아니듯 말입니다.

  더 알아보기: “The Geometry of Musical Chords,” Dmitri Tymoczko, Science, July 7, 2006.

• 스도쿠 풀기

- 스도쿠 퍼즐에는 수학이 많이 들어있습니다. 숫자를 채우는 퍼즐이니 당연하다고 하겠지만, 숫자 대신 기호를 써도 해답을 찾는 과정은 동일할 것입니다. 더 흥미로 운 것은 해답을 찾는 과정 뒤에 숨은 논리인데, 논리를 이용하면 (훨씬 덜 지우면 서) 퍼즐 풀기에서 더 큰 만족감을 얻을 수 있습니다. 그 뿐만 아니라 스도쿠는 추상대수학과 통계학, 실험 설계에서 중요한 라틴 방진의 일종입니다.

  스도쿠 관련 개수 세기 질문으로 “퍼즐을 푸는 데 채워진 숫자의 최소 개수는 몇 개인가”와 “서로 다른 퍼즐은 몇 개인가”가 있습니다. 주어진 숫자가 17개이면서 해답이 하나뿐인 퍼즐은 존재하지만, 해답이 하나이면서 16개의 숫자만 주어진 퍼즐이 있는지는 아무도 모릅니다. 두 번째 질문에 대해서는, 50억 개 이상의 스도쿠 퍼즐이 가능합니다. 경우의 수를 셀 때, 숫자들을 서로 바꾸거나 상위 두 줄을 바꾸는 것처럼 변형 가능한 퍼즐들은

같은 퍼즐로 봅니다. 현대 물리학과 화학에 중요 한 군론과 대칭론에 근거해서 얻은 결과입니다.

더 알아보기: Sudoku Squares and Chromatic Polynomials, Agnes M. Herzberg and M. Ram Murty, Notices of the American Mathematical Society, June-July, 2007.

• 안면 재건 수술하기

- 수학의 새로운 응용으로 외과의가 3차원 가상 모형 위에 구현된 다양한 수술 방법들을 분석하여 안면 재건 수술을 계획할 수 있게 되었습니다. 이전에는 CT 촬영으로 만든 복제 모형을 사용하였었는데, 그 가격이 높을뿐더러 한 모형당 한 수술법만을 실험할 수 있었습니다. 새로운 가상 모형은 기하학, 편미분방정식, 수치해석학을 사용하여 다양한 수술 방법들에 관련된 뼈와 연조직의 움직임을 표현함으로써 의사와 환자가 결과물을 미리 보고 최선의 수술 방법을 택할 수 있게 합니다.

  안면 수술의 3차원 시뮬레이션은 수십만 개의 4면체로 이뤄진 격자를 사용하여 뼈 재배치의 결과를 예측하고 그 결과가 연결 조직에 미치는 영향을 계산합니다. 이 시뮬레이션은 실제 결과와 오차가 1mm 이내로 정확하여 교수 도구나 새로운 기법을 시험하는 플랫폼으로 사용할 수 있습니다. 이렇게 수학적 모형은 현재 환자 뿐만 아니라 미래의 환자들의 외모도 개선시키고 있습니다.

더 알아보기: Mathematics in Facial Surgery, Peter Deuflhard, Martin Weiser, and Stefan Zachow, Notices of the American Mathematical Society, October 2006.

• 위조 사진 가려내기

- 실은 둘이 같이 있는 것이 포착된 것이 아니라 소프트웨어로 사진을 붙인 것입니다. 두 명의 스타의 얼굴에 드리운 그림자에서 비밀이 탄로납니다. 같은 해변에 태양이 두 방향에서 비칠 일은 없으니까요! 그보다 정교한 디지털 변조를 수학으로 검출합니다. 미적분과 선형대수학, 통계학은 사진 일부분이 다른 곳에 복사되었거나 교체되었다는 것을 판정하는 데에 특히 유용합니다.

  사진을 변조하면 파일에 통계적 자취가 남습니다. 예를 들어, 사진에서 사람을 지 우고 그 자리를 배경 부분으로 대체했다면 결과 파일의 서로 다른 두 부분이 동일 하게 됩니다. 이러한 조작을 밝혀내는 것은 대체된

부분의 위치나 크기를 미리 알지 못하므로 어렵습니다. 어떤 성공적인 알고리즘은 먼저 색상 유사성에 따라 작은 영 역들을 분류하고 비슷한 영역들로 이루어 진 더 큰 영역들로 이동하여 반복된 부분을 찾아냅니다. 선도적 디지털 감식 전문가인 이 알고리즘의 개발자는 사진 변조자들이 대체로 수사관에 앞서 간다고 인정하지만, 감식 능력이 진보하여 빠져나가기가 더 어려워지고 있다고 보고 있습니다. 덧붙여 사기꾼을 잡기 위해서는 "결국 가장 중요한것은 수학"이라 말합니다.

더 알아보기: "Can Digital Photos be Trusted?," Steve Casimiro, Popular Science, October 2005.

• 물체를 투명하게 만들기

- 투명한 물체는 이제는 소설에만 존재하는 것이 아닙니다. 최근 실험에서는 극초 단파를 원통을 따라 구부려 본래 궤도로 돌아오게 하여 그 파장에서는 원통을 거의 보이지 않게 하는 데에 성공하였습니다. 이것이 투명 인간(또는 은폐된 우주선)이 곧 가능하다는 것을 뜻하진 않지만, 수학자들은 전자기학의 기본 편미분 방정식 맥스웰의 방정식을 사용하여 몇몇 간단한 경우에는 보는 것은 믿는 것이라는 말이 사실이 아니라는 것을 보여 주었습니다.

  극히 유별난 특성을 갖도록 할 수 있는 전자기 물질인 메타물질도 이 투명성 시연의 성공에 일부 기여했습니다. 또 다른 성공 요소는 점을 공으로 부풀려 그 안의 것들을 "은폐"하는 수학적 변환을 사용한 데에 있습니다. 이 변환은 연구자들 이 종양이 어떻게 감지를 빠져나가는지 연구하는 중에 발견했습니다. 잘 보이게 하기 위한 노력이 결국 잘 안 보이게 하는 방정식의 개발에 이른 것입니다. 더 최근에 연구된 변환을 이용하면 전자기파를 마치 공간의 위상이 변형된 것처럼 행동하도록 속이는 광학적 "웜홀"을 만들 수 있습니다.

더 알아보기: Metamaterial Electromagnetic Cloak at Microwave Frequencies, D. Schurig et al, Science, November 10, 2006.

• 이산화탄소 묻기

- 에너지 효율을 개선하고 대체 연료를 찾는 것과 더불어 대기권으로 들어가는 엄청난 양의 이산화탄소를 다루는 한가지 가능한 방법은 탄소 격리로, 이산화탄소가 방출되기 전에 수천 피트 지하의 오래되거나 쓸모없는 저장소에 묻는 것입니다. 당연히 지질학이 관계하지만 수학도 그렇습니다.

선형대수학과 수치해석학, 편미분방정식은 지하 누출의 정도를 예측하기 위한 소규모 실험과 결합하여 탄소 격리법의 실행 가능성을 계산해 주는 모형의 기반을 이룹니다.

탄소 격리의 효과를 계량화하는 데 사용하는 수학적 모형은 범위가 넓어서, 작은 바위 구멍을 지나는 데에서 거대한 저장소 안에서까지, 몇 분에서 몇 세기에 이르 기까지의 이산화탄소의 운동을 정확히 계산합니다. 이 문제는 많은 학자가 현재 연 구 중인 유체 역학 분야 중 비교적 최신 분야입니다. 가스 누출 통로로 이용될 수 있는 수백만 개의 분출공 때문에 문제가 더 복잡해집니다. 이 문제를 두고 한 연구 자는 그녀 자신과 지구를 위한 “일생일대의 모형 문제”라고 말하였습니다.

더 알아보기: Geosciences Conference Tackles Global Issues, Barry Cipra, SIAM News, June 2007.

- 과거 보존하기
  - 수천 년 동안 서 있던 구조물들이 대기 오염으로 인해 무너지고 있습니다. 수학자들은 습도, 온도, 오염 수준 등을 결합한 모형을 통해 (오염원이 수증기와 반응하여 돌의 표면을 다공성 석고로 변질시켜 발생하는) 붕괴 과정을 연구합니다. 미분방정식에 근거한 이 모형은 고대 유적을 복구하고 혹시 모를 붕괴를 예방하는 데에 더 나은 방안을 제시합니다.

부식 과정을 모형화할 때 한 가지 어려움은 이 과정이 습도처럼 계속 변하는 조건 들에 크게 좌우된다는 것입니다. 이렇게 관련 요인이 많으므로 모형을 다룰 수 있게 하려면 석고의 표면에서는 그에 맞대고 있는 공기 온도와 동일하다는 식의 단순하게 만드는 가정이 필요합니다. 그렇게 해서 얻은 비선형 방정식은 수치해석적으로 해를 구할 수 있으며 단순화하였음에도 결과가 매우 정확합니다. 이 모형을 개발한 학자들은 최근 다음과 같은 사실을 발견하였습니다. 습도가 어느 값 이하일 때에는 돌이 석고로 변질되지 않는다는 것, 이미 생성된 석고를 제거하는 것은 역효과를 부를 수 있다는 것, 진행 중인 부식 경계면의 크기는 시간과 오염 물 질의 농도의 제곱근에 좌우된다는 것 등입니다.

더 알아보기: Lost Beauties of the Acropolis:What Mathematics Can Say, by Antonio Fasano and Roberto Natalini, SIAM News, July/August 2006.

더 알아보기: “Geosciences Conference Tackles Global Issues,” Barry Cipra, SIAM News, June 2007.

- 더 빠르게 항해하기
  - 경주에서 많은 일들이 물 위에서 발생합니다. 한편 출발 총소리가 울리기 수년 전부터 보트의 선체와 돛을 설계하느라 육지에서도 해야 할 일들이 상당히 많습니다. 공기와 물을 헤치며 효율적으로 항해할 수 있는 20톤의 배를 만드는 과정 의 상당 부분은 수학 - 특히 유체 흐름에 관한 이론과 관련되어 있습니다. 실제로 오늘날 아메리카컵에 출전하는 요트의 설계에는 약 4천만 개의 방정식이 이 용되어 그 배의 승무원들이 가능한 가장 빠른 배를 운항하고 있음을 보증해 줍니다.

    가벼우면서도 튼튼하게 건조하기와 같이 얼핏 보기에 모순되는 조건들을 아우르는 요트 디자인은 주로 물에서보다 디자인을 시험하기 쉬운 컴퓨터로 이루어집 니다. 배의 표면은 설계 과정에서 대수적으로 조작 가능한 더 작은 면들을 사용 하여 근사적으로 나타냅니다. 이 작은 근사면들은 (다항식들의 조각들로 구성 된) 만곡선(spline)이라 부르는 함수들로 정의되며, 보통 곡률을 측도로 사용하 여, 곡면이 만나는 곳에서 경계가 매끄러워지도록 결합됩니다. 요트의 디자인에 있어 오차의 여지는 아주 작습니다. 속력에서 단 1%의 차이는 1초가 소중한 경주에서 수 분의 차이에 해당하기 때문입니다.

    더 알아보기: Design Optimization for the International America's Cup Class, Frank DeBord, Jr., John Reichel, Bruce Rosen, and Claudio Fassardi, http://www.sailboat-technology.com/links/SNAME-2002.pdf.
- 베르누이처럼 휘기
  - 그림 속의 색 “실”들은 축구공 주위의 공기 흐름을 나타낸 것으로, 공 뒤로 흐르는 진한 파란색은 저압 항적을 나타냅니다. 계산 유체역학과 풍동 실험은 매끄러운 흐름과 난류 사이의 전이점이 시속 45킬로미터 정도에 있음을 보였는데, 이러한 사실은 공을 찼을 때 네트에 접근하는 공의 진로가 그 속력이 줄면서 전이점을 통과함에 따라 궤적이 극적으로 변할 수 있음을 의미합니다. 프리킥을 차는 선수 들이 득점하려고 수학자가 될 필요는 없지만 수학적 사실에 따른 결과를 이해한 다면 더 나은 전략을 세울 수 있을 것입니다.

    공의 행동은 어떻게 찼는가 뿐만 아니라 표면 디자인에 따라 달라집니다. 위상수 학과 대수학, 기하학 모두 적합한 형태를 정하는 데 중요하며, 바람직한 것을 결 정할 때 모형을 사용합니다. 축구공 궤적의 연구자들은 수학

모형에 새로운 공의 패턴뿐만 아니라 솔기에까지 이르는 상세한 항목을 모두 포함합니다. 최근 오랫 동안 사용했던 오각형-육각형 패턴에서 아디다스 +Teamgeist^{TM}로의 급진적인 변화가 있었습니다. 그러나 총체적인 설계 과정의 골격은 변하지 않았습니다. 2차 원천 조각을을 사용하여 공 모양에 2% 이내로 근접하게 만드는 것입니다.

더 알아보기: Bending a Soccer Ball with CFD, Sarah Barber and Timothy P. Chartier. SIAM NEWS, July/August 2007.

- 부빙 따라 흐르기
  - 해빙(海氷)은 지구 기후에서 가장 덜 이해된 요소 중 하나입니다. 해빙이 많아지고 줄어드는 것이 기후 변화를 말해주는 신호인 것은 당연하지만, 해빙은 또한 바다를 단열시키고 햇빛을 반사하여 기후 변화에 중요하게 관여합니다. 수학의 한 분야인 삼투이론은 염수가 해빙 사이를 이동하는 과정을 설명해 주는데, 현재 존재하는 해빙의 양뿐만 아니라 극지 생태계를 유지하는 미생물계에도 중요한 과정입니다. 표본을 채취하고, 현장 실험을 수행하고, 그리고 데이터를 다공성 물질의모형에 결합함으로써 수학자들은 해빙을 이해하고 기후 예측을 정교하게 하는데 도움이 되고자 노력하고 있습니다.

    확률론과 수치해석학, 편미분방정식을 이용하여 연구자들은 최근에 해빙과 지구 지각에 있는 특정 퇴적암이 구성물질은 다르지만 투수성이 비슷하다는 점을 발견하였습니다. 이 두 물질 사이의 큰 차이점은 불과 몇 도의 온도 변화에 따라 해빙은 완전 차단에서 완전 통과까지 투수성이 극적으로 변할 수 있다는 것 입니다. 이 차이점은 해빙의 규모와 두께에 대한 자료를 제공하는 위성이 측정하는 데 중대한 영향을 미칠수 있습니다. 해빙에 대한 연구는 위성측정의 신뢰도를 높일 뿐만 아니라, 인체의 폐나 뼈의 다공성을 설명하고 다른 행성의 얼음을 이해하는 데에도 응용할 수 있습니다.

    더 알아보기: Thermal evolution of permeability and microstructure in sea ice, K. M. Golden, et al., Geophysical Research Letters, August 28, 2007.

- 거장의 음성 듣기
  - 아래 사진의 와이어 스풀에는 전설적인 포크 가수 우디 구스리(Woody Guthrie)의 유일하게 알려진 실황 녹음이 들어 있습니다. 수학자 케빈

쇼트는 카오스 소리 압축과 관련된 신호처리기술을 이용해 종종 전혀 알아들을 수 없었던 실황공연의 녹음을 복구하는 팀에 참여하였습니다. 이에 사용된 현대 기술은 차가운 디지털 출력 대신에 본래 콘서트의 열정과 깊이까지 되살려냈습니다. 그 결과 쇼트와 그의 팀은 놀라운 녹음 복구를 공로로 그래미상(Grammy Award)을 수상하였습니다.

복구 작업의 첫 과정은 재생 장치를 통해 와이어를 수동으로 풀어 디지털 형식으로 변환하는 것이었습니다. 푸는 속력이 일정하지 않아서 때로는 소리가 상당히 왜곡되었습니다. 이러한 속력 변동을 바로잡고 음파를 본래의 형태로 바로잡는 알고리즘은 이미 주파수를 아는 배경 잡음을 “시계”처럼 사용합니다. 이 기발한 수정 작업은 또한 선택적으로 소리를 샘플링하고, 샘플들 사이의 소리를 복구하고 다시 샘플링하는 작업에도 의존합니다. 수학은 60년 가까이 잃었던 이 공연을 소생시키는 것 이상을 해냈습니다. 어디에서나 오디오 애호가들의 귀중한 테이프를 디지털화하는 데 이 방법을 사용합니다.

더 알아보기: The Grammy in Mathematics, Julie J. Rehmeyer, Science News Online, February 9, 2008.

- 함께 움직이기
  - 많은 동물 떼의 집단적인 움직임은 때로 경이로움을 선사합니다. 새 떼와 물고기 떼 들은 통솔자 없이도 그리고 소수의 구성원들 외에는 무리의 거의 모든 구성원들을 인식하지 않으면서도, 대형을 유지하며 먹이를 찾고 포식자를 피할 수 있습니다. 벡터 해석학과 통계학을 사용한 연구 결과 몇 가지 단순한 원리를 알아낼 수 있었습니다. 예를 들어, 무리의 개체는 이웃하는 개체들과 보조를 맞추면서도 최소의 거리를 유지하며, 그래서 아래의 사진과 같은 형태도 설명할 수 있습니다.

    동물의 집단적인 이동은 보기에 아름다울 수 있지만, 때로는 손실을 줍니다. 큰 해를 주는 메뚜기떼는 인구의 10퍼센트에 영향을 미칩니다. 많은 동물들이 집단 동역학을 보여주는데, 생물들은 크기가 작아도 무리는 거대할 수 있기 때문에 연구에 사용되는 모형은 매우 다양한 규모의 거리들을 설명할 수 있어야 합니다. 그에 따른 방정식은 연루된 동물의 수가 엄청나기 때문에 수치적으로 풀어야만 합니다. 이 연구의 결과는 메뚜기와 같이 파괴적인 곤충을 다루는 데 사용될 뿐만 아니라 사람들의 이동 속도를 향상시키는 데 도움이 될 수 있습니다. 개미의 경우 교통 체증을 좀처럼

겪지 않으니까요.

더 알아보기: Swarm Theory, Peter Miller. National Geographic, July 2007.

- 고성능 차량 만들기
  - 자동차 경주에서 레이싱 팀은 운전자 못지않게 중요합니다. 트랙을 수백 바퀴 도는 동안 경쟁자를 떨어뜨릴 수단이 별로 없으므로 레이싱 팀은 그들을 우승 레인으로 밀어줄 기술적 우위를 모색합니다. 오늘날 특별히 응용되는 이론 중에는 계산 유체 역학이 있는데, 이것은 차량 자체나 (예를 들어, 앞 차 뒤를 바짝 붙어 달릴 때) 다른 차량과의 관계에서의 공기 흐름을 계산합니다. 공학자들은 미적분이나 기하학처럼 더 근본적인 분야에도 의지하여 차량을 개선합니다. 어느 레이싱 팀의 공학자는 미적분학과 물리학 선생님들을 언급하며 "그들이 가르친 수업은 내가 지금까지 들은 수업 중 가장 중요했다"고 말했습니다.

    수학은 일반 자동차의 성능과 효율을 개선하는 데도 사용됩니다. 엔진 성능을 높이기 위해서는, 제어 장치가 공기/연료 비율처럼 중요한 값들을 조정할 수 있도록 관련 데이터들을 매우 빠르게 수집하고 처리해야 합니다. 혁신적인 샘플링 기술로 이러한 실시간 데이터 수집과 처리가 가능해졌습니다. 이 기술은 경주에서 우승 만큼이나 가치 있는 목표인 배기가스 감소와 연비 향상에 기여합니다.

    더 알아보기: The Physics of NASCAR, Diandra Leslie-Pelecky, 2008.

- 블랙홀
  - 충돌하는 블랙홀은 빅뱅 이후 가장 강력한 중력파를 일으켜, 일반상대론을 실험할 독특한 방법을 제공합니다. 하지만 중력파는 탐지된 적이 없어 최근까지 어떻게 생겼는지 아무도 몰랐습니다. 이제 비유클리드 기하학과 미분방정식을 결합한 중 요한 계산의 비약적 발전이 블랙홀 간에 일어나는 충돌을 시뮬레이션하고 그에 따른 파동의 패턴을 설명합니다. 이러한 수학과 슈퍼컴퓨터의 융합은 블랙홀의 충 돌만큼 강력할 순 없지만, 천체 물리학에 일반상대론을 증명하거나 새로운 이론으로 인도하는 파급 효과가 있을 것입니다.

    다양한 블랙홀의 회전과 질량을 설명할 수 있는 새로운 모형은 충돌 과정을 세 단 계로 나눕니다. 첫 번째와 마지막 단계에서는 일반 상대성 방정식과 적분을 해석적 으로 풀 수 있지만, 블랙홀들이 각자의 반지름의

몇 배 이내로 가까워진 가운데 단 계에서는 해를 수치적으로 계산해야 합니다. 교묘하게 좌표를 변환하고 영역의 중요성에 따라서 데이터 지점의 수를 조절하여 해를 얻을 수 있습니다. 최근 시뮬레이션을 통해 알아낸 한가지 사실은 어떤 블랙홀 충돌은 블랙홀을 은하계 밖으로 뿜어낼 만큼 강력하다는 것입니다.

더 알아보기: Computing Cosmic Cataclysms, Joan Centralla et al. SciDAC Review, Summer 2008.

- 천재의 업적 복원하기
  - 아르키메데스는 아인슈타인이나 뉴턴에 필적하는 가장 뛰어난 천재 중 한 명으로 손꼽힙니다. 그러나 그가 쓴 논문들 가운데 극히 일부만이 현존합니다. 오랜 세월 탓이기도 하지만 연구 내용이 든 사본이 지워지고 재사용되었기 때문이기도 합니다. 덮어 쓰인 저술(이러한 문서들을 팔림프세스트(palimpsest)라고 합니다)들 중 하나가 재출현했는데, 통계학과 선형대수학을 사용한 디지털 영상 기술로 조합 론과 미적분학에 관련하여 알려지지 않았던 아르키메데스의 발견이 드러났습니다. 이러한 발견은 아르키메데스조차도 궁금케 할 질문을 자아냅니다. 이 발견들이 지워지지 않았다면 수학과 과학은 과연 얼마나 더 진보했을까요?

    아르키메데스의 저작에 관해 가장 극적인 복원은 엑스레이 형광을 사용하여 이뤄졌습니다. 1940년대에 이 책의 이전 소유자에 의해 원래 문서가 그림으로 덮였는데, 엑스레이가 그림을 관 통하며 밑에 있던 옛날 잉크의 철분을 드러내어 아르키메데스의 논문 ‘역학 정리에 대한 방법’의 한 페이지가 발견되었습니다. 이 문서를 포함한 그의 다른 아이디어들을 복원하는 전체 과정은 아르키메데스의 발견과 기술 위에 건설된 현대 수학과 물리학으로 가능하였습니다. 이렇듯 돌고 돌아온 진보의 완성은 아르키메데스의 잃어버리지 않았던 업적 중 하나가 π의 근삿값에 관한 것이라는 점에서 대단히 어울린다 하겠습니다.

    더 알아보기: The Archimedes Codex, Reviel Netz and William Noel, 2007.

- 스텐트 개선하기
  - 스텐트는 막히거나 손상된 혈관에 삽입하는 팽창이 가능한 튜브입니다. 이 튜브들은 혈관을 수리하고 혈액이 자유롭게 흐르도록 열어놓아 관상동맥 질환을 처치하는 실용적인 방법을 제공합니다. 스텐트가 제 기능을 발휘한다면 과격한 수술의 훌륭한 대안이 될 수 있지만, 성능이 저하되거나

빠질 수도 있습니다. 혈관과 스텐트의 수학 모형이 튜브의 더 나은 모양이나 재질을 정하는데에 도움을 주고 있습니다. 이 모형들은 매우 정확해서 FDA는 고가의 실험 필요성을 줄이기 위해 시험 전에 스텐트의 설계에 대한 수학적 모형화를 요구하는 방안을 고려하고 있습니다.

인체의 전체 혈관계를 정확하게 모형화하는 것은 현재 계산 능력을 훨씬 넘어서므로 연구자들은 작은 하부 영역 위의 상세한 모형에 집중하고 이를 혈관계의 나머지 부분들에 대한 더 단순한 모형들과 결합합니다. 나비어-스토크스(Navier- Stokes) 방정식이 혈액의 흐름과 혈관벽과의 상호 작용을 나타내는 데에 사용됩니다. 어떤 스텐트 타입을 포기하고 더 나은 것의 설계에 이르게 된 최근의 어떤 연구에 수학적 증명 하나가 핵심이었습니다. 이제 목표는 심장 마비의 주요 원인인 관상동맥 질환의 처치와 예측을 개선하는 더 좋은 계산 유체-혈관 모형들과 스텐트 모형들을 개발하는 것입니다.

더 알아보기: Design of Optimal Endoprostheses Using Mathematical Modeling, Canic □Krajcer, and Lapin, Endovascular Today, May 2006.

• 해답 찾아내기 Working It Out

- 히트곡의 악보 대부분은 아주 잘 알려졌지만, 때로 불명확한 경우도 있습니다. 40년 넘게 풀리지 않았던 의문 중 하나는 비틀스의 “A Hard Day's Night”라는 노래의 전주가 어떤 기악 편성법과 음조들로 이루어졌나입니다. 비틀스의 열광적 팬인 수학자 제이슨 브라운은 자신의 음악 지식과 이산 푸리에 변환을 사용해 최근 그 해답을 찾았습니다. 이 변환은 신호를 기본 요소들로 분해해주는 수학적 변환인데 신호 처리에서부터 큰 수의 곱셈에 이르기까지 여러 응용을 간단하게 만들어주므로 연구자들이 해답을 얻기 위해 “개처럼 일하지(working like a dog)” 않아도 됩니다.

  브라운은 또한 수학, 특히 그래프이론을 사용하여 레논과 매카트니가 서로 작곡 하였다고 주장하는 “In My Life”를 누가 작곡하였는지 알아내려 하고 있습니다. 그의 그래프는 각 코드를 점으로 표시하고 한 코드 바로 다음에 다른 코드가 따 라오면 그 점들을 서로 연결합니다. 작곡자가 알려진 모든 곡이 도표화되면, 브라운은 매카트니 혹은 레논의 그래프 모음 중 어느 것이 더 “In My Life”에 잘 맞는지 보일 것입니다. 혁명적인 밴드를 이해하는 데에 수학을 사용하는 것이 어쩌면 직관에 반하는 일로 보일 수 있지만, 이러한 분석 방법으로 비틀스 최고의 음악 일부에 고유한

작곡 원리들을 파악하고 발견할 수 있습니다. 그러므로 수학을 the Fab 22에 응용하는 것은 매우 자연스럽고 보람이 있는 일입니다.

더 알아보기: Professor Uses Mathematics to Decode Beatles Tunes, The Wall Street Journal, January 30, 2009.

- 모든 역 들르기
  - 26개 노선에 468개의 역이 있는 뉴욕 지하철 체계는 방문객의 입장에서는 계획한 여정을 하루에 성공적으로 소화하면 행운으로 여기게까지 됩니다. 그럼에도 뉴요커 크리스 솔라즈와 맷 페리시는 24 시간 안에 모든 역을 방문하여 세계 기록을 깨기로 하였습니다.

    크리스와 맷의 성공은 다른 분야에서는 그리 큰 파급효과가 없을지라도 그들의 작업은 사람들이 현대 수학을 연구하는 방식과 많은 공통점을 가지고 있습니다.

    · 그들은 공동으로 일했으며, 컴퓨터를 자주 사용하였고 종종 전문가들의 조언을 구하였습니다.

    · 목표를 달성하기 위하여 많은 시간과 노력을 바쳤습니다.

    · 최적에 가까운 해에 도달할 때까지 끊임없이 자신들의 알고리즘을 개선하였습니다.

    마지막으로, 연구자들이 느끼는 감정도 똑같이 경험하였습니다. 그 많은 시간과 강도 높은 준비 과정에도 불구하고 과제가 “일이라기보다는 재미로 느껴졌다”는 점입니다.

    더 알아보기: Professor Uses Mathematics to Decode Beatles Tunes, The Wall Street Journal, January 30, 2009.

- 기증자 연결하기
  - 신장 이식이 필요한 사람은 신장을 기증하려는 친구나 친척이 있어도 그들의 신장이 부적합할 경우에는 사망한 기증자의 신장을 기다릴 수밖에 없습니다. 미국에서만 해도 매해 수천 명이 적합한 신장을 끝내 찾지 못하고 사망합니다. 그래프 이론을 응용한 새로운 기법이 부적합한 환자-기증자들로 이루어진 집단에 적용 되어 가능한 많은 환자-기증자 쌍 교환을 이루어냅니다. 환자 A와 짝지어진 기증자가 환자 B에게 신장을 이식해주고, 환자 B와 짝지어진 기증자가 환자 A에게 이식해주는 교환은 살아있는 기증자들로부터의 이식을 극적으로 증가시킵니다. 이식은 투석보다 비용이

적게 들어 이 수학적 알고리즘은 생명을 구하는 이외에 매년 수억 달러를 절약하게 해 줍니다.

자연스럽게 (예를 들어, A의 기증자는 B에게, B의 기증자는 C에게, C의 기증자 는 A에게 이식하는) 더 긴 환자-기증자 사이클을 따른 연결을 생각하면 더 많이 이식할 수 있습니다. 문제는 가능한 긴 사이클의 수가 너무 빠르게 증가하여 (5,000쌍의 환자-기증자 쌍에는 수억 개의 A→B→C→A 연결이 존재합니다) 모든 가능성을 검토하는 것은 불가능하다는 것입니다. 현재 막걸음(random walk)과 정수 프로그래밍을 독창적으로 사용하여 부적합한 환자-기증자 쌍 전체를 포함하는 큰 데이터베이스에서도 3자 간의 교환을 모두 검색할 수 있습니다.

더 알아보기: Matchmaking for Kidneys, Dana Mackenzie, SIAM News, December 2008.

• 기후 예측하기

- 지구의 기후와 우리는 미래에 어떤 모습일까요? 답을 얻으려면 대규모의 계산 능력과 함께 물리학, 화학, 지구과학, (다른 학문보다도) 수학이 필요한 엄청나게 복잡한 질문입니다. 수학자들은 편미분방정식으로 대기의 이동을 모형화하고, 동력 학계로 육지, 대양, 대기, 얼음 사이의 피드백을 기술하며, 통계학을 이용하여 현재 예측의 불확실성을 계량화합니다. 서로 다른 기후 예보 사이에는 어느 정도 상 이점이 있지만, 연구자들은 사람들이 이러한 노력에 동참하여 기후 이해를 돕는 새로운 접근법을 고안하는 것이 절실히 필요하다는 데는 모두 동의합니다.

온도와 기압 등이 거의 같은 날씨들이 불과 며칠 후에는 서로 전혀 다른 날씨들로 변할 수 있기 때문에 2주 뒤의 날씨를 예측하는 것조차 불가능합니다. 그렇다면 장기적인 기후는 어떻게 예측할 수 있을까요? 그 답은 기후가 기상 조건들의 평균 값이라는 것입니다. 각 개인의 정확한 키를 모르고도 100명의 평균 신장에 대해 정확한 예측을 할 수 있는 것과 마찬가지로 특정 날짜의 조건들을 예측할 수는 없어도 수년 후의 기후를 예보하는 것은 가능합니다. 이제 도전 과제는 더 많은 데이 터를 수집하고 유체역학과 수치해석과 같은 학문을 이용하여 오늘날의 20년 예측 을 100년 예측으로 늘리는 것입니다.

더 알아보기: Mathematics of Climate Change:A New Discipline for an Uncertain Century, Dana Mackenzie, 2007.

• 데이터 분석하기

- 게놈 서열 결정에서부터 우주 공간에 대한 디지털 측량에 이르기까지 최근 연구 들은 엄청난 양의 고차원적 데이터를 발생시킵니다. 하지만 3차원을 넘는 공간을 시각화하는 것은 쉬운 일이 아니어서 데이터를 분석하고 이해하는 데 많은 어려 움이 있습니다. 수학의 여러 분야 중에서 기하학적 구조 등의 성질을 다루는 위상수학은 데이터 집합을 형태에 따라 분류하는 방법을 제공하여 많은 양의 데이터 집합들의 구조를 이해하는데 도움을 줍니다. 특히 클러스터(cluster)라고 부르는 유사한 점들의 모임을 찾아내는데 유용하여, 예를 들어 같은 질병에 대해 다른 치료법이 필요한 유형을 구분해줍니다.

  위상수학, 특히 대수적 위상수학은 자동차 교통을 모니터하고 관개를 조정하는 등 다양한 분야에서 이용되는 무선 센서 네트워크의 운영에 중요한 역할을 합니다. 대수적 위상수학의 결과들은 수치 적분법과 결합하여 극히 지엽적인 데이터를 가지고도 전체 그림을 제공합니다. 이러한 감지기망은 GPS나 다른 거리 측정 장치 없이도 유지되므로 일반적으로 훨씬 저렴한 비용으로 운영할 수 있다는 장점이 있습니다. 그래서 관개의 경우 현대 기술이 도래하기 1세기쯤 전에 이루어진 수학적 발견이 돈을 절약하고 귀중한 물을 현명하게 사용하게 도와줍니다. 위상수학의 용어로 말하면 뫼비우스 띠처럼 돌고 도는 셈입니다.

  더 알아보기: Topology and Data, Gunnar Carlson, Bulletin of the American Mathematical Society (Vol. 46, No. 2), April 2009.

• 전염병의 확산을 저지하기

- 질병의 확산을 분석하는 가장 유용한 도구 중에 세 범주로 구분한 인구들 사이의 역학을 다루는 진화적 연립방정식이 있습니다. 이 세 범주란 감염가능자들(S, susceptible), 감염자들(I, infected), 회복된 자들(R, recovered) 입니다. 이 SIR 모형은 천연두에서 독감에 이르기까지 다양한 질병에 적용할 수 있습니다. 어떤 특정 질병의 영향력을 예측하려면, 전형적인 감염자는 평균 몇 명을 감염시 키는가와 같은 몇가지 변수들을 아는 것이 중요합니다. 학자들은 이러한 변수들 을 예측하기 위해 수집된 데이터(예를 들어 보고되지 않은 사례 등으로 이 데이터는 완벽하지 못합니다)에 통계적 방법을 적용합니다. 신뢰할 수 있는 모형으로 무 장한 수학자들은 보건 당국이 복잡하고 빠르게 변하는 오늘날의 전염병들에 맞서 싸우는 데

힘이 되고 있습니다.

오늘날의 모형들은 불과 몇년 전의 모형들보다 훨씬 정교합니다. 예를 들어 접촉 기간이 모든 사람에게 동일하다고 가정하는 대신 (서로 다른 가구의 성인들 사이 보다 나이가 어린 사람들끼리의 접촉 시간이 더 깁니다) 연령에 따라 다르다는 등의 정보를 담습니다. 변이성을 다룰 수 있는 능력은, 예를 들어 독감에 대처하는 예방 접종 전략의 효율성 예측을 가능하게 합니다. 현재 어떤 모형들은 사회적 상호작용의 연결망을 나타내는 그래프이론과 행렬을 이용하는데, 이는 특정 질병이 얼마나 빠르고 멀리 퍼질지 이해하는 데에 중요합니다.

더 알아보기: Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology, Fred Brauer and Carlos Castillo-Chavez.

- 어떻게 접히는지 알기

  - 인간 게놈의 염기서열 결정이 대단히 중요한 성과였지만, 이제 어려운 부분이 남 아있습니다. 단백질의 구조와 기능을 이해하는 것입니다. 우리 몸속 100,000개의 단백질은 (접힘이라 부르는) 구조 및 다른 단백질과의 교신을 통해 인체의 모 든 생물학적 기능들을 개시하고 제어하며 수행합니다. 잘못 접히거나 표적을 잘못 택한 단백질은 암, 광우병, 낭포성 섬유증과 같은 질병을 일으킵니다. 계산 생 물학자들은 기하학, 확률론, 매듭이론을 이용해 단백질의 복잡한 접힘을 설명하기 시작하였습니다. 기능 이상 단백질이 정확히 어떻게 어긋났는지 알 수 있다면 그에 맞는 약을 설계하여 피해 세포들을 복구할 수 있을 것입니다.

  단백질은 극미의 공간과 많은 경우 극소의 시간 안에서 조립 및 재조립되지만, 단백질의 기능을 시뮬레이션하면 수십억의 아주 작은 시간격마다 수백만 번의 계 산을 포함하는 방대한 것입니다. 적분, 편미분 방정식, 선형 대수학, 수치해석학을 포함하는 수학 분야 대부분이 단백질의 행동을 시뮬레이션하는데 사용되는데, 가장 단순한 형태의 단백질에서 조차 해를 구하려면 병렬 계산이 필요합니다.

  이런 작은 규모에 그런 거대한 노력을 집중하는 것이 이상해 보일 수도 있지만 결실이 많습니다. 어떤 HIV 균주는 치료에 대한 저항 성이 컸는데 HIV 단백질인 인테 그라제에 대한 모형을 통해 나노 단위의 틈새를 발견하여, 그 틈새를 화합물로 채움으로써 저항성을 극복할 수 있었습니다.

더 알아보기: From Protein Structure to Function with Bioinformatics, Daniel John Rigden, Editor.

• 진실에 다가가기

- 수학은 인권침해와 선거 부정에 관련된 여러 큰 사건들의 수사를 도와왔습니다. 그중 몇 가지 사건들을 소개하겠습니다. 2009년 이란 대통령 선거. 벤포드의 법칙이라 알려진 수학적 결과에 따르면 진 정한 난수들의 첫자리 숫자들은 예상할 수 있듯이 고르게 분포하지 않습니다. 대신 9처럼 높은 수보다는 1처럼 낮은 수들의 빈도가 더 높다고 합니다. 벤포드 법칙과 다른 통계학적인 검사들을 2009년 선거에 적용하자 집계 결과가 의심스럽다는 의혹이 강하게 암시되고 있습니다.

  인종 청소. 슬로보단 밀로셰비치가 법정에 섰을 때, 그의 논지는 코소보에서의 알바니아계의 대량 이주는 자신의 어떤 명령이 아니라 NATO 폭격과 알바니아 코소보 해방군의 활동 때문이라는 것이었습니다. 한 팀이 난민의 흐름에 대한 데이 터를 수집하고 이러한 가설을 시험하여 밀로셰비치의 주장을 전부 반박할 수 있 었습니다.

  과테말라인 실종. 이 경우에 약 20만 건의 사망 및 실종에 관련한 8천만 장 이상 의 국립 경찰 기록으로부터 정보를 추출하는 데 통계학을 사용합니다. 표본 추출 법은 수사관들이 기록을 전부 읽지 않고도 기록이 나타내는 정확한 요지를 파악 할 수 있게 합니다. 피해자 가족들은 친지들에게 일어난 일에 대해 오랫동안 찾아 다녔던 증거들을 확보하고 있고, 수사관들은 유괴나 살인의 동기와 수법을 밝혀 내고 있습니다. 비통하게도 사람들은 사라졌습니다. 그러나 이러한 분석 덕분에 진실은 사라지지 않을 것입니다.

  더 알아보기: Killings and Refugee Flow in Kosovo, March-June 1999, Ball et al., 2002.

• 깊이를 더하기

- 영화에 디지털 기술이 상당히 사용되면서 수학은 최근 여러 히트작에서 (대부분 출연자로 오르지 못한) 주요 배역이었습니다. 그 역할은 이제 감독과 애니메이션 제작자들이 수학으로 2차원 스크린에 또 다른 차원을 도입하는 영화의 새로운 시 대를 열면서 영향력을 확장하고 있습니다. 여러분이 보는 화면은 기하학, 선형대수 학, 편미분방정식, 벡터해석학으로 창조되었습니다. 애니메이션 제작자들이 사용 하는 알고리즘은 이러한

분야 및 다른 분야들의 아이디어를 사용하여 빛의 반사와 굴절을 표현하고 머리카락, 물, 혹은 파란색이긴 하지만 피부를 살아있는 듯 묘사 합니다.

분석가들은 몇 년이 걸릴지 모르지만 3D 텔레비전 시청이 결국 일반화될 것으로 보고 있습니다. 현재 연구자들은 가정에서 TV를 시청할 때처럼 여러 각도에서 시청하는 것과 같은 문제를 처리하려고 노력하고 있습니다. 그들의 노력은 우리에게 더 풍부한 오락 이상을 선사할 것입니다. 과학자들은 3D 기술을 통해 분자와 같은 물체를 더욱 쉽게 시각화할 것이고, 수술의들은 더 정밀한 치료법을 기획하고 더 효율적으로 시행할 수 있을 것입니다.

더 알아보기: The Race for Real-time Photorealism, Henrik Wann Jensen and Tomas Akenine- Möller, American Scientist, March-April 2010.

- (거의) 무에서 유를 창조하기
  - 그림 등의 디지털 파일을 만들 때, 저장하거나 전송하기 전에도 보통은 필요 이상 의 정보가 기록됩니다. 오른쪽 이미지는 확률론과 선형 대수학에 기반을 둔 획기적인 기법인 압축 감지법을 통해 생성되었습니다. 정보를 초과하여 기록하고 불 필요한 정보를 버리는 대신, 센서들이 생성 과정에서 가장 중요한 정보들만을 수집하여 전기와 시간, 메모리를 절약합니다. 효율성을 증대시켜 줄 수도 있으므로, 연구자들은 동력 소모를 최소화하는 것이 중요한 우주 임무에서부터 빠른 이미지 생성 속도가 더 나은 스캔을 얻고 환자를 편하게 해주는 MRI에 이르기까지 다양 한 압축 감지법 응용처를 조사하고 있습니다.

    같은 단어라도 여러 다른 언어로 표현할 수 있듯이, 영상이나 음성과 같은 신호들도 여러 가지 방법으로 표현할 수 있습니다. 압축 감지법은 주어진 신호들의 모임에 가장 적은 비트를 소모하는 표현을 사용합니다. 이 표현에 선형 프로그래밍을 적용하여 특정한 정보가 별로 없는 신호에 잘 합치하는 가장 유력한 후보를 찾습니다. 수학자들은 매우 드문 몇 경우를 제외하고는 (보통 기존 방식으로 수집된 데이터의 아주 작은 부분보다 더 적은 것으로 구성된) 이 후보가 원래의 정보와 일치한다는 것을 증명하였습니다. 질을 떨어뜨리지 않고 가장 중요한 요소들을 파악하고 수집할 수 있는 능력은 전혀 예상밖이어서 압축 감지법을 발견한 수학 자 또한 믿기 어려웠다고 합니다.

더 알아보기: Compressed Sensing Makes Every Pixel Count, What's Happening in the Mathematical Sciences,Vol. 7, Dana Mackenzie.

• 돌발 파도 이해하기

- 돌발 파도(rogue wave, 별다른 조짐없이 외해에서 주변보다 훨씬 가파르고 거 대하게 발생하는 파도)는 퍼펙트 스톰의 경우에만 발생하는 것은 아닙니다. 때로는 바람과 해류가 충돌하며 파도를 비선형적으로 결합하여 이처럼 우뚝 솟는 물 기둥을 만듭니다. 수학자들 및 연구자들은 돌발 파도들이 어떻게, 왜 생기는지 이해하기 위해 자료를 수집하고 편미분방정식들을 이용하여 모형을 만듭니다. 이 파도들의 원인과 빈도수에 대해 깊이 이해하면 해양운송과 해양고정식 설비에서의 작업을 더 안전하게 할 수 있을 것입니다.

  돌발 파도는 (다행히) 드물 뿐더러 빨리 사라지기 때문에 연구하기 쉽지 않습니다. 그래서 몇몇 연구자들은 다른 매질에서 빛으로 돌발 파도를 만드는 실험을 합니다. 이러한 실험의 결과는 선원들의 주장과 일치하는데, 다른 드문 사건들과 마 찬가지로 돌발 파도 역시 표준 모형의 예측보다 훨씬 빈번히 발생한다는 것입니다. 표준 모형은 파고의 분포가 종 모양을 이룬다고 가정하였고, 돌발 파도는 대략 만년에 한번 꼴로 발생하는 것으로 예측하였습니다. 이렇게 발생 가능성이 극히 적다는 주장 때문에 설계자들과 설비건설자들은 돌발 파도에 잠재된 파멸적 영향을 고려하지 않았습니다. 지금은 돌발 파도가 드물기는 하지만 실제로 발생 할 수 있다는 것을 알게 되어 해운업계가 수십억 달러를 절약하게 할 수 있고 수백 명의 생명을 구할 수 있게 되었습니다.

  더 알아보기: Dashing Rogues, Sid Perkins, Science News, November 18, 2006.

• 의석 배정하기

- 총인구 조사도 어렵지만, 그에 따라 각 주의 국회의원 의석수를 결정하는 작업은 더욱 어려울 수 있습니다. 하원에서 각 주를 대표하는 의원 비율은 전체 미국 인구에서 주 인구의 비율과 맞아야 한다는 기본적인 전제는 아주 간단합니다. 하지만 분수로 인해 발생하는 곤란한 상황이 있습니다(예를 들어, 뉴욕주에 28.7석 을 배정할 수는 없습니다). 지난 200여 년 동안 의석수 배분에 여러 방법이 사용 되었습니다. 이 중에는 그럴듯하게 들리지만, 예를 들어 전체 하원의 의석수를 늘렸는데도 어떤 주의 의석은 오히려

줄어드는 모순이 발생하기도 했습니다. 1940년대부터 지금까지 사용한 방법은 이러한 모순을 피할 수 있는데, 주요 발의자는 수학자였습니다.

자연스럽게 떠오르는 한 가지 의문은 왜 총 의석수가 435석일까입니다. 헌법 어디에도 이 숫자를 지정하진 않지만, 3만 명당 두 석 이상을 배정하는 것은 금지하고 있습니다. 입법자들이 자신들 및 유권자들과 소통하기 위한 필요성에 기초하여 만든 한 모형은 대수학과 미적분학을 사용하여 가장 이상적인 의회의 규모는 대표하는 인구의 세제곱근임을 말해줍니다. 신기하게도, 1900년도 초기까지 하원의 의석수는 이 법칙을 반영하였습니다. 현재 이 규칙을 따르면 의석수를 670석으로 늘리는 것을 의미하는데, 어쩌면 주민을 더 잘 대표할 것이고 막바지 발언을 하는 의원의 수보다 의회장에 착석한 의원의 수가 더 많을 확률을 높여 줄 것입니다.

더 알아보기: E pluribus confusion, Barry Cipra, American Scientist, July-August 2010.

• 의료 서비스 검토하기

- 때로 여러분이 낸 만큼 돌아오지 않을 때가 있습니다. 미국은 다른 어느 나라보다 1인당 의료 보험비를 더 많이 쓰지만, 전반적인 건강에서는 많은 선진국에 비해 뒤떨어집니다. 확실하고, 증거에 기초한 약품에 더 잘 쓰일 수 있는 많은 돈이 현 재 증거의 뒷받침이 없는 검사와 시술에 쓰이고 있습니다. 물론 의료 보험의 효율성을 높이는 데에는 생물학과 화학이 필수이지만, 수학, 특히 확률론과 통계학 또한 중요한 역할을 합니다. 예를 들어, 수년 간의 자료에서 매년 찍는 흉부 엑스레 이와 몇몇 당뇨약이 유익하기보다는 유해한 점이 더 많다는 것이 입증됐습니다. 이 제 이러한 절차는 폐기되어, 여러 생명을 살리고 비용을 절약합니다.

항암치료는 더 분석하여 볼 필요가 있는 의학 분야입니다. 많은 경우 투여량은 약의 실질적 효능보다는 부작용에 대한 환자의 내성력에 의거하여 처방됩니다. 때로 치료하지 않은 종양은 작아지고 치료 중인 종양은 커질 때가 있습니다. 미분방정식과 수치해석학을 이용하여 종양 세포와 면역 세포, 숙주 세포, 환자가 복용하는 약 물 간의 상호 영향을 모형화하므로써 이러한 수수께끼를 해결할 수 있었습니다. 이 연구는 항암치료와 면역요법을 (전부 아니면 전무 외에) 더 복잡하게 조합하여 사용할 수 있게 하여 치료법의 효능을 극대화하는 동시에 부작용을 극소화하여 줍니다.

더 알아보기: Modelling in Healthcare,The Complex Systems Modelling Group, 2010.

- 효율적으로 건물짓기
  - 빌딩들은 엄청난 양의 에너지를 소비하는데, 소비량을 절반으로 줄이는 것은 모 든 승합차와 소형 트럭을 1년 동안 주행하지 않는 것과 맞먹습니다. 하이브리드 차에서 처럼 에어컨 장치와 조명 같은 구성 요소를 지속해서 모니터링하는 하나 의 시스템으로 통합하면 이런 감축이 가능합니다. 이 통합 접근법은 수학을 바탕 으로 하는데, 유체역학은 통풍구와 열 감지기를 최적으로 설치하는데 사용되고, 그래프이론과 선형대수학은 감지기가 수집하는 엄청난 양의 데이터 중 가장 중 요한 요소들을 추려냅니다. 이로써 시스템의 효율적인 작동에 필수적인 실시간 조절이 가능하여 사람들과 지구 모두를 쾌적하게 해줍니다.

    많은 최첨단 빌딩들이 수 세기 전 중앙 냉난방 시스템이 흔해지기 전에 개발된 방법(예를 들어 남향으로 짓기)들을 사용한다는 것은 아이러니합니다. 하지만 이렇게 재발견한 방법만으로는 오늘날의 빌딩을 에너지 효율적으로 짓기에는 부족합니다. 수집한 데이터의 불 확실성을 계량화하고, 각 사무 실에서 빌딩에 이르는 각 공간 규모에 따라 에너지 사용량을 조정하고, 복잡한 공기 흐름을 이해하기 위해서는 현대 수학과 공학이 필수입니다. 비용은 5-10년 안에 회수할 수 있기 때문에, 이러한 새로운 설계를 성공적으로 시행하는 것은 재원보다는 창의성과 혁신의 문제입니다.

    더 알아보기: “Control, estimation and optimization of energy efficient buildings,” Jeff Borggaard, et al., Proceedings of the 2009 American Control Conference.

- 더 나은 경기 만들기
  - 트리플 코르크란 스노보더가 공중에서 세 번 지면과 평행해지는 스핀 점프입니다. ESPN의 스포츠 과학 프로그램에서 수학교수인 팀 차티어에게 일정한 조건 하에서 그런 점프가 가능한 것인지 질문한 2011년 이전에는 시합에서 수행된 적이 없습니다. 처음에는 의심스러웠지만, 그와 최근에 수학을 전공한 대학원생이 미분방 정식, 벡터해석학, 미적분학을 사용하여 트리플 코르크가 실제로 가능함을 발견하였습니다. 며칠 뒤에, 보드 선수

토스타인 호르그모는 (아마도 모두가 좋아하는 변수 이름을 딴) X-게임에서 성공적으로 트리플 코르크를 완수하였습니다.

현대의 운동선수나 코치가 답을 수학에서 찾는 스포츠는 스노보딩만이 아닙니다. 수영과 봅슬레이 연구에 유체 흐름을 분석하여 항력을 줄이기 위해 계산 유체역 학을 이용합니다. 축구와 농구 분석가들은 그래프이론과 네트워크 이론을 활용하여 패스를 도표로 그려 팀의 효율을 계량화합니다. NFL의 감독들은 통계학과 게 임이론을 적용하여 전통적인 $\sqrt{9}$ 야드와 흙먼지에 매달리기보다 경기의 기댓값에 초점을 맞춥니다.

더 알아보기: http://espn.go.com/video/clip?id=6065222.

- 경보 울리기
  - 자연의 엄청나게 강력한 이벤트인 쓰나미가 발생하는 것을 막을 수 있는 것은 아무 것도 없습니다. 그러나 많은 경우에 지진 감지기, 해수면 모니터와 심해의 부표로 구성된 네트워크를 써서 당국이 위험에 처한 사람들에게 적절한 경고를 발령할 수는 있습니다. 편미분방정식으로 구성된 수학적 모형들은 생성된 데이터를 사용 하여 쓰나미의 속도, 크기, 해안선에 도착하는 시간의 추정치를 계산합니다. 이러 한 모형들은 해안에 먼저 도착하는 것이 물마루인지 골인지 예측하는 경우도 있습니다. 골이 먼저 도착하는 약 절반의 (전체는 아닌) 경우, 수위가 극적으로 후퇴한 후에 물마루가 강습합니다.

    수학은 또한 감지기와 모니터를 배치하는 데 도움을 줍니다. 연구자들은 기하학과 인구 데이터를 사용하여 최대한 많은 사람에게 경고할 수 있는 최적의 센서 위치를 찾아냅니다. 일단 장비가 설치되면 경고 센터는 지진이 위험한 쓰나미를 일으키는 형태인지 확인하기 위해 많은 지진 부서에서 오는 데이터를 수집 처리합니다. I 지진을 예측하는 일이 현재에는 매우 어려우므로 이 모든 작업은 지진이 발생 할 때까지 기다려야 합니다. 지진으로 생성된 쓰나미에서 먼 해안가 사람들은 행동을 취할 시간이 몇 시간이 될 수 있지만 가까이 있는 사람들에게는 몇 분의 문제입니다. 쓰나미 파도의 물마루는 탁 트인 바다에서 시간당 450마일로 이동할 수도 있으므로 편미분 방정식을 빠르게 푸는 알고리즘은 필수입니다.

    더 알아보기: Surface Water Waves and Tsunamis, Walter Craig, Journal of Dynamics and Differential Equations,Vol. 18, no. 3 (2006), pp. 525-549.

- 질문에 대답하기, 답에 질문하기
  - 전문가들은 자신의 분야에 관한 질문에는 능숙하게 대답하지만, 아무리 박식한 권위자라도 현재 생성되는 모든 데이터를 따라갈 수 있을 것이라 기대할 수는 없습니 다. 컴퓨터는 데이터를 처리할 수 있지만, 지금까지는 일상 언어로 제시되는 질문을 이해하는 데는 무능했습니다. TV 퀴즈 프로그램 '제퍼디!'에서 우승한 IBM 컴 퓨터인 왓슨은 비형식적이고, 뉘앙스가 있으며, 말장난마저 들어있는 문구를 사용한 질문에 답할 수 있는 컴퓨터의 사례입니다. 그래프이론, 형식논리와 통계학은 결 코 단순하지 않은 질문들에 적시에 대답하는데 사용하는 알고리즘을 만드는데 도움을 줍니다.

    왓슨의 제작자들은 TV 게임 쇼에서 이기는 것보다 훨씬 더 많은 일을 할 수 있는 기술을 만들기 위해 노력하고 있습니다. 프로그래머들은 (기술지원을 제공하는 것 같은 매우 간단한 일 에서부터 정확한 진단을 찾는 의사의 질의에 응답하는 등과 같이 더 복잡한 일에 이르기까지) 현실 세계에 대한 전문적 답변을 신속하게 내놓는 시스템을 만들려 하고 있습니다. 연구 대부분은 컴퓨터 과학과 연관되지만, 수학은 다른 산업으로 응용을 확장하고 이러한 현대 질문-응답 시스템을 구성하는 하드웨어의 크기와 비용을 줄이는 데 도움이 될 것입니다.

    더 알아보기: Final Jeopardy: Man vs. Machine and the Quest to Know Everything, Stephen Baker, 2011.
- 공급망 유지하기
  - 일상적인 상황에서도 A 지점에서 B 지점으로 가는 것이 때로는 힘들지만, 재해 발생 후에는 음식, 식수, 의류를 평소의 공급지점에서 절실히 필요한 사람들에게 운송하는 것이 거의 불가능할 수 있습니다. 재해 발생 후에도 기능할 가능성이 가장 높은 공급망을 고안하기 위한 새로운 수학적 모형에 확률과 비선형 프로그램을 사용합니다. 각 지역이나 국가를 위해 이 모형은 네트워크의 붕괴나 사람들의 요구 증가 등이 조합된 상황에 대응할 수 있는 견고한 공급/배급망을 생성해냅니다.

    수학은 또한 의료 기관이 전염병 확산과 같은 위급상황에서 좀 더 효율적으로 작동하도록 돕습니다. 유체역학 및 조합적 최적화이론은 시설 배치 설계에 응용되어 자원을 잘 할당할 수 있게 하고, 역학 모형에 응용되어 분배시설 내에서의 총 감염을 최소화하면서 운영을 개선하도록

합니다. 이것은 백신과 기타 의약품을 신속하고 효과적으로 관리할 수 있게 해줍니다. 또한, 해결 시간이 매우 빨라서 관리자가 상황에 맞는 최신자료를 입력할 수 있고, 필요한 용품 또는 직원을 실시 간으로 재분배할 수 있게 합니다.

더 알아보기: Supply Chain Network Economics: Dynamics of Prices, Flows, and Profits, Anna Nagurney, 2006.

- 심장 박동 유지하기
  - 혈액을 내보내는 심장의 기능은 매우 단순해 보이나, 건강한 리듬을 유지하게 하는 배경 메커니즘들과 전기적 신호들은 극도로 복잡합니다. 미분방정식, 동력학계, 위상수학을 포함한 수학의 많은 분야가 심장 세포들의 전기 반응, 심장 세포들과 심장의 전반적인 기하학적 형태와의 관계를 모형화하는데 일조하고 있습니다. 연구자들은 정상적으로 작동하는 심장에 대해 더 잘 이해하는 것과 함께, 심장 이상의 징후를 진단하고 바로잡는 방법을 알아내는 것이 목표입니다.

    심장 리듬을 고장 나게 할 수 있는 많은 것 중에 (놀랍게도) 다소의 예측 불가능 성은 포함되지 않습니다. 건강한 심장 박동은 실제로 매우 혼돈적이고 전혀 규칙 적이지 않습니다. 더욱이 나이가 들고 심장의 기능이 저하되어감에 따라 박동 패턴은 덜 혼돈스러워집니다. 실제로 어느 한 연구자는 새로운 약 처방을 받은 환자는 의사에게 “이 약이 나의 프랙털 차원에 어떤 영향을 줍니까?”라고 질문할 것을 권하고있습니다.

    더 알아보기: Taking Mathematics to Heart: Mathematical Challenges in Cardiac Electrophysiology, John W. Cain, Notices of the AMS, April 2011, pp. 542-549.

- 풍력 활용하기
  - 풍력을 사용 가능한 에너지로 변환시키는 과정에 수학이 여러 가지 방식으로 기여 합니다. 대규모 기상 모형은 풍력 발전소에 적합한 부지를 찾는 데 사용되며, 소규모에 초점을 맞춘 모형은 후류효과나 난류와 같은 요소로부터 발생하는 상호작용 을 통합하여 각각의 풍력 발전기를 발전소 내의 어느 위치에 배치할 지를 결정합니다. 또한, 계산 유체역학은 발전기 주변의 공기의 흐름과 항력을 설명해줍니다. 이 것은 가능한 많은 에너지를 추출하면서도, 잡음 수준과 비용은 줄이기 위해 구 조적, 공기역학적으로 최적인 날개 형태를 결정하는데 도움을 줍니다.

수학은 또한 풍력 발전기에 관한 두 가지 기본적인 질문에 대한 답을 제시합니다. 첫째로, 왜 날개가 세 개일까요? 날개 수가 적은 터빈은 에너지를 적게 추출하며, 날개가 빠르게 회전해야 하기 때 문에 시끄럽습니다. 날개가 세 개 이상인 경우 에너지를 더 많이 끌어낼 수 있으 나 추가로 3% 정도에 불과하므로 비용 증가를 정당화하기 어렵습니다. 둘째로, 풍력 발전기는 과연 몇 퍼센트의 풍력 에너지를 추출할 수 있을까요? 미적분학과 에너지보존 법칙으로 정당화할 수 있는 베츠의 법칙은 바람 속 에너지의 60% 이상은 추출할 수 없다고 합니다. 현재 발전기는 일반적으로 40~50% 정 도의 에너지를 얻습니다. 그러므로 65% 이상의 풍력 에너지를 얻을 수 있다며 발전기를 강매하려는 사람에게는 “헛바람 들었군요”라고 대답하십시오.

더 알아보기: Wind Energy Explained: Theory, Design and Application, Manwell, McGowan, and Rogers, 2010.

• 사물을 초점에 유지하기

- 가장 단순하며 잘 알려진 곡선 중에서 포물선과 타원은 역사가 고대 그리스까지 거슬러 올라가며, 가장 유용한 곡선이기도 합니다. 포물선에는 오늘의 태양광 발전 기술에 많이 이용하는 반사 속성이 있습니다. 포물선 모양의 거울은 모든 들어 오는 빛을 초점이라는 단일 지점으로 반사하고 거기서 태양 에너지가 사용 가능한 에너지로 변환됩니다. 타원은 두 개의 초점을 갖는데 쇄석술이라는 의료 처치 에 활용되는 유사한 반사 속성을 갖고 있습니다. 신장 결석과 담석 환자는 돌이 하나의 초점에 놓이도록 타원 절반에 해당하는 모양의 탱크에 자리를 잡습니다. 다른 초점에서 보낸 음파는 모든 에너지를 돌에 집중시켜 돌을 수술 없이 분쇄합니다. 수학이 때로는 여러분에게 커브(곡선)를 던질 수 있지만, 반드시 나쁜 것은 아닙니다.

포물선과 타원은 원뿔 곡선이라 부르는 곡선입니다. 이 범주에 있는 다른 곡선으로는 우주 본질의 이해 라는 가장 심오한 응용이 가능한 쌍곡선이 있습니다. 평면 기하학에서 고정된 점에서 주어진 거리에 있는 점들은 원을 이룹니다. 공간 에서 고정된 점에서 주어진 시공간 거리에 있는 점들은 쌍곡체[쌍곡선의 고차원 형태]의 한쪽이 됩니다. 이런 조건은 임의로 부여한 것 이 아니라 상대성의 원리가 거리와 인과 관계에 대한 우리의 개념과 타협할 때 나오는 방정식의 자연스러운 결론입니다. 원뿔

곡선들이 발견된 이래로 시간이 한참 흘렀지만, 오늘날에도 계속 이득을 주고 있습니다.

더 알아보기: Practical Conic Sections: The Geometric Properties of Ellipses, Parabolas and Hyperbolas, J.W. Downs, 2010.

- 다이아몬드 커팅하기
  - 다이아몬드와 기타 보석을 세공하는 연마사들은 상충하는 요구로 큰 압박을 받습니다. 최대의 광채를 얻기 위해 원석에서 흠들을 제거해야 하나 가능한 최대의 무게가 나오는 방식이어야 합니다. 다이아몬드는 보통 표준 형태로 연마하는데 비 해 루비나 사파이어와 같은 보석은 수백 가지 서로 다른 형태로 연마할 수 있으므로 더 복잡합니다. 수학자들은 기하학과 다변수미적분학을 최적화 기법과 결합하여 광채와 수율을 극대화하는 정확한 절단면을 자동으로 생성해내는 알고리즘을 고안할 수 있었습니다.

    목표는 원석 속에 있는 최종 모양을 찾는 것입니다. 가능한 모양, 위치, 방향이 무 한히 많으므로 최종 모양을 찾는 것은 무한히 많은 제약조건을 지닌 많은 변수에 관련된 최대화 문제인 반(半)무한 최적화 문제라 부르는 문제에 해당합니다. 숙련된 연마사들은 평균적으로 원석 무게의 약 1/3에 해당하는 완성된 보석을 만들 어 냅니다. 이 자동화된 알고리즘으로 연마하면 수율이 40%보다 훨씬 높게 개선 되므로 원석 가격을 생각하면 대단한 향상입니다. 확실히 반무한 최적화 문제는 아가씨의 (혹은 청년의) 좋은 친구입니다.

    더 알아보기: A Deterministic Approach to Gemstone Cutting, Karl-Heinz Küfer, Oliver Stein, and Anton Winterfeld, SIAM News, October 2008.

- 비만을 통제하기
  - 한때 선진국 만의 문제였던 비만은 이제 전 세계적인 전염병입니다. 이 전염병의 가장 큰 원인이 식량 공급과 식품 소비의 극적인 증가라는 것은 놀랍지도 않습니다. 실험실 안에서는 사람들을 장기간 고립시킬 수 없는 반면 실험실 밖에서는 다이어트 일지의 신뢰성이 낮기 때문에 체중 변화에 관해 답할 수 없는 수수께끼는 여전히 많습니다. 미분방정식에 기반을 둔 수학적 모형이 이러한 장애를 극복하여 음식 섭취, 대사 및 체중 변화 사이의 관계를 자세히 분석할 수 있도록 도와줍니 다. 이 모형의 예측은 기존 데이터에 잘 들어맞으며, 체중을 꾸준히 낮추기 어려운 이유나, 비만인 사람의 체중이 증가하기 쉬운 이유 같은 것들을 설명합니다.

연구자들은 왜 다이어트하는 사람들이 종종 몇달 후에 정체기에 이르렀다가 천천히 체중이 다시 느는지도 조사하고 있습니다. 한가지 가능한 설명은 음식 소비 감소에 맞추기 위해 신진대사가 느려진다는 것이지만, 음식 섭취와 에너지 소비를 표현하는 동력학계 모형들에 의하면 훨씬 나중에까지 그러한 체중 정체에 도달하지 않는다는 것을 보여줍니다. 체중 정체의 가능한 원인은 느려진 신진대사와 다이어트 준수 태만의 결합입니다. 대부분 사람들은 대략 정상(定常) 상태에 있으므로 체중의 증감에는 장기적 변화가 필요합니다. 좋은 소식은 하루에 10칼로리씩 (지속해서) 줄이면 3년 동안 체중이 1파운드(약 454g) 줄어들고, 그중 절반은 처음 1년 안에 준다는 사실입니다.

더 알아보기: Quantification of the effect of energy imbalance on bodyweight, Hall et al. Lancet,Vol. 378 (2011), pp. 826-837.

- 자동차 자동화하기
  - 믿기 어려울지 모르겠으나 사람보다 컴퓨터가 자동으로 차량을 운전하는 것이 훨씬 안전할 수 있습니다. 매년 30,000명 이상의 미국인들이 자동차 사고로 사망하는데, 대부분 사람의 실수로 발생합니다. 자동화된 차량들이라면 위치와 속도를 서로 전달하여 졸음 운전이나 난폭 운전의 우려 없이 잠재적 충돌을 피할 수 있을 것입니다. 아직 해결해야 할법적인 (그리고 보험 관련) 문제들이 산적해 있지만, 연구자들은 사물을 인식하고 추적하기 위한 기술 개발을 위하여 기하학을, 위험 요소 평가를 위하여 확률론을, 시스템이 요구대로 수행하는지 평가하기 위하여 논리학 등을 적용하여 자동 운전 시스템을 현실화하려고 노력하고 있습니다.

    자동화된 차량이 출현하면, 예를 들어 자동화된 교차로와 같은 새로운 교통 관리 시스템을 도입해야 할 것입니다. 차량은 교차로를 관리하는 컴퓨터와 통신하여 안전하게 통행할 순서를 지정받을 것입니다. 1000분의 1초 사이에 컴퓨터는 삼 각법과 미분방정식을 이용하여 교차로를 통과하는 차량들의 운행 경로들을 모의 실험해 보고 다른 차량들의 경로와 충돌하지 않으면 통행을 허용할 것입니다. 신호 대기를 완전히 없앨 수는 없어도 상당 부분 줄임으로써 현재 낭비되고 있는 연료나 운행자의 인내력 또한 줄일 수 있을 것입니다. 왼쪽 그림 상의 교차로는 꽤 복잡해 보이지만, 자동화된 자동차들이 정확한 자신들의 차로 를 따라 운행하기 때문에 현재 우리가 운전하여 교차로를 통과 하는 것보다 훨씬 안전하고 효율적이라는

것이 실험 결과 밝혀졌습니다.
더 알아보기: A Multiagent Approach to Autonomous Intersection Management, Kurt Dresner and Peter Stone, Journal of Artificial Intelligence Research,Vol. 31 (2008), pp. 591-656.

- 범죄 예보하기
  - 어느 누구도 누가 범죄를 저지를지 예측할 수 없으나 몇몇 도시에서는 수학의 도 움으로 어디서 범죄 발생 확률이 가장 높은지 찾아내고 있습니다. 그러면 경찰은 범죄를 방지하기 위해 이러한 "취약지역"들에 대한 순찰을 늘립니다. 이러한 혁신 적인 시도, 즉 예측적 경비는 기존 범죄들부터 수집한 방대한 자료에 기초하고 있지만, 지도와 압핀 이상의 것들이 관련되어 있습니다. 예측적 경비는 강진 후에 발생하는 여진들을 예측하는 데 사용하는 것과 비슷한 알고리즘을 사용하여 취약 지역을 찾습니다. 최근에 발생한 지진의 진앙 부근에서 여진 발생 확률이 높은 것 처럼 범죄 발생 역시 그러한데, 범죄자가 범죄 현장에 돌아오거나 매우 가까이 있는 경우가 실제로도 많기 때문입니다.

    이러한 접근법을 채택한 도시에서는 범죄 비율이 떨어졌음이 확인되었고 그러한 비율 하락에서 예측적 경비가 기여한 부분을 측정하는 연구가 진행중입니다. 확인된 사실 중 하나는 취약지역의 특성에 관한 것입니다. 연구자들은 편미분방정식과 분기이론을 사용하여 순찰 증가에 매우 다르게 반응하는 두 가지 유형 의 취약지역을 발견했습니다. 한 유형에서는 취약성이 다른 장소로 이동 하고 다른 유형에서는 그 지역의 취약성이 완전히 사라집니다. 유감스럽게도 이 두 유형이 표면적으로는 같게 보여서, 수학자들과 관계자들은 경찰 자원을 가장 잘 할당할 수 있도록 두 유형을 구별하는 방법을 찾으려 노력하고 있습니다.

    더 알아보기: The Santa Cruz Experiment, Kalee Thompson. Popular Science, October 2011.

- 잡고 던지기
  - 땅에 떨어지는 공(또는 전기톱)의 개수가 0이 되도록 하는 것 이외에도 저글링에는 많은 수학이 숨어있습니다. 특정한 저글링 패턴이 실제로 가능한가와 같은 저글러들의 중요한 질문에 대한 답은 조합론 및 추상대수학 분야의 도움으로 설명 할 수 있습니다. 예를 들어 각각의 공이 허공에 머무르는 시간 간격이 다섯 박자와 한 박자 사이를 엇갈리는 저글링이

가능한가요? 이 질문의 답은 “예”입니다. 또한 수학은 그러한 저글링 패턴에 필요한 공의 개수는 박자의 평균, 이 경우 세개라고 답해 줍니다.

일단 어떤 패턴이 “저글링 할 수 있다”고 판정 되고 필요한 공의 개수가 알려지면 운동방정식 이 각각의 공을 던져야 하는 속도와 도달하는 최고 높이를 계산합니다. 저글러가 더 세게 공 을 던질수록 더 빨리, 더 높이 올라간다는 사실은 분명합니다. 불행히도 공이 공중에 떠 있는 시간은 높이의 제곱근에 비례하여 증가하므로 많은 물체를 공중에 유지하는 어려움이 급격히 증가합니다. 수학과 저글링 모두 수천 년 동안 이어져 왔으나 여전히 두 분야 모두에 문제들 이 남아있습니다. 두 명의 저글러 수학자는 “저글러는 수학자와 마찬가지로 결코 끝이 나지 않습니다. 항상 또 다른 커다란 미해결 문제는 남아있습니다”라고 썼습니다.

더 알아보기: The Mathematics of Juggling, Burkard Polster, 2003.

• 친구 찾기

- 페이스북에는 7억 명 이상의 사용자와 거의 700억 연결이 있습니다. 사람들이 친 구를 만드는 일은 어렵지 않지만, 페이스북의 컴퓨터가 친구의 친구에 대한 정보를 포함한 관련 데이터를 저장하고 접근하는 것은 어렵습니다. 친구의 친구에 대한 정보는 사용자에게 친구추천(알 수도 있는 사람)에 중요합니다. 이 작업의 대부분은 컴퓨터 과학과 관련 있지만, 수학도 중요한 역할을 합니다. 선형 프로그래밍 및 그래프이론과 같은 분야가 친구의 친구를 확인하는 시간을 반으로 줄여서 페이스북의 컴퓨터에서 네트워크 트래픽을 3분의 2가량 줄여줍니다. 어떻게 좋아 하지 않을 수 있겠습니까?

  사람들이 친구가 되는 확률은 그들 사이의 거리가 증가함에 따라 감소하는 경향이 있습니다. 물리적 세계에서도 상식이지만, 디지털 세계에서도 그렇습니다. 그럼에도 불구하고, 페이스북 사용자의 거대한 네트워크는 작은 세계 네트워크의 예입니다. 평균 페이스북 사용자 사이의 거리(사람들을 연결하는 친구-링크의 수)는 5보다 작습니다. 사용자 및 사용자들의 연결관계의 모음이 혼란스러워 보이겠지만, 이 네트워크는 실제로 상당수의 구조를 갖고 있습니다. 예를 들어 “검색 가능한” 네트워크입니다. 즉, 친구-연결로 다섯 단계 떨어진 두 명이 있을 때, 한 사람에 서 다른 사람으로 각 지점에 있는 친구는 알지만 그 친구의 친구들은 알지 못하면서도 이동할 수 있을 가능성이 큽니다.

더 알아보기: Networks, Crowds, and Markets: Reasoning about a Highly Connected World, David Easley and Jon Kleinberg, 2010.

- 화성에 착륙하기
  - 이 경우 첫 착륙은 마법과 같았습니다. 탐사선 큐리오시티가 7분에 걸쳐 시속 13,000마일에서 0으로 완벽하게 감속하여 화성에 안전하게 착륙한 것을 말합니다. 이것이 실제로 탐사선이 착륙한 것으로는 유일한 경우였지만, 엔지니어들은 이미 벡터해석학과 연립미분방정식을 결합한 수학 모형을 이용하여 수백만 번 모의 착륙을 했습니다. 모의실험의 성공률이 높아서 프로젝트팀은 중요한 변수를 모두 고려했다면 착륙이 성공하리라고 95% 이상 확신할 수 있었습니다. 임무를 위험하게 만드는 것은 미지의 변수들인데, 이런 변수는 모든 탐사의 원천이므로 적절하다 하겠습니다.

    물론 탐사의 진짜 목적은 정보를 수집하여 지구로 되보내는 것입니다. 서로 응답 기에 메시지만 남기고 직접 통화는 못한 경험이 있다면 두 행성 간에서 데이터의 질이 쉽게 저하될 거라는 것을 알 것입니다. 그래서 통신 전문가들은 지구에서 수 신한 것의 정확성을 보장하기 위해 오류 정정 부호를 사용합니다. 하지만 부호로도 대단히 먼 거리를 극복할 수는 없어서 송신과 수신 사이에 14분간 지연되는 일 은 어쩔수 없습니다. 그래서 착륙할 때 7분간의 암흑기가 생깁니다.

    더 알아보기: 7 Minutes of Terror, by Eric Hand. Nature, August 2, 2012, pages 16-17.

- 힉스 보존 찾아내기
  - 대규모 실험으로 이원자 입자인 힉스 보존을 발견한 것은 입자물리학과 수학 모두의 승리입니다. 이 입자의 존재는 수학, 그중에서도 다변수 미적분학, 벡터해석학, 선형대수학을 이용하여 예측한 것입니다. 또한, 군으로 알려진 어떤 대수 구조의 네 개의 차원은 힘의 네 기본 매개자에 해당하며, 그중 셋은 핵력을 매개하고 힉스장과 상호작용하여 입자에 질량을 부여합니다. 힉스 보존은 손으로 가리 키거나 볼 수 있는 종류의 대상이 아니어서, 확률론과 통계학으로 독립적인 실험 들에서 가장 관련된 데이터를 선택하고, 그 실험들이 실제로 오랫동안 찾아왔던 입자의 존재를 나타낸다는 것을 검증해 주었습니다.

    이 발견이 몇 가지 질문에 대한 답을 주었지만, 전부는 아닙니다. 연구자들은 이제 얼마나 많은 종류의 힉스 보존이 있는지, 어떻게 다른

입자와 상호작용하는지, 초대칭이론과 같은 다른 이론에 어떤 의미가 있는지 알아내야 합니다. 이에는 더 웅대한 실험과 더 큰 슈퍼 충돌기가 필요합니다. 슈퍼 충돌기가 아무리 거대하고 엄청난 에너지를 생성한다 해도, 그런 힘도 기본 방정식들과 이의 논리적 함의로부터 얻은 통찰력의 힘에는 미치지 못할 것입니다.

더 알아보기: What's Happening in the Mathematical Sciences,Vol. 9, Dana Mackenzie, 2013.

- 건축을 자유롭게
  - 오늘날 가장 눈에 띄는 건물 대부분은 전통을 벗어난 자유로운 모양입니다. 수학의 새로운 분야인 이산 미분기하학은 설계자의 디지털 창작으로 시작된 이러한 복잡한 모양을 건축할 수 있게 해줍니다. 유리나 금속 한 조각으로 큰 구조를 만 들어내는 것이 불가능하므로, 원래의 매끄러운 표면에 가장 잘 맞는 작은 조각들을 사용하여 디자인을 구현합니다. 삼각형이 모양을 표현하기에 당연한 선택인 듯하지만, 사변형이 (더 어려워 보여도) 재료와 비용을 절약해주고 구조를 만들기가 더 쉽다는 것이 밝혀졌습니다.

    연구자들의 주요 목표 중 하나는 설계 및 시공에 관련된 변수들을 통합하는 효율적이고 매끄러운 프로세스를 만들어 건축가들이 주어진 아이디어의 타당성을 초기에 평가할 수 있도록 하는 것입니다. 현시점에 계획을 구현하는 일은 (전체 구조를 관리가능하고 제작 가능한 부분들로 나누는) 분할과, (원하는 모양에 최대한 근접하도록 고차원 공간에서 비선형방정식을 푸는) 최적화 사이에 컴퓨터를 이용한 광범위한 (또한 종종 비용이 많이 드는) 상호 작용이 있어야 합니다. 설계자와 엔지니어는 이런 프로세스를 개선할 새로운 수학을 찾고 있습니다. 그러므로 건축과 수학 분야는 서로를 풍요롭게 하는 나선 계단으로 묘사할 수 있는데, 건축의 필요는 새로운 수학으로 이어지고 수학은 처음으로 그 형태를 가능하게 해줍니다.

    더 알아보기: Geometric computing for freeform architecture, J.Wallner and H. Pottmann. Journal of Mathematics in Industry, Vol. 1, No. 4, 2011.

- 거품 띄우기
  - 무게로나 쓸모 면에서나 아주 하찮은 기포는 거품을 만드는 기초 단위입니다. 바로 이 때문에 자전거 헬멧 내부 패딩으로부터 방화제에 이르는 응용에 중요합니다. 거품을 관찰해봤다면 누구나 알듯이 기포는 크기가

다양하고, 커지기도 하고, (아래처럼) 클러스터를 형성하기도 하고, 터지기도 합니다. 이 모든 것 때문에 거품을 설명하기 매우 어렵습니다. 수학자들은, 연결된 기포 사이의 유체의 흐름과 같은 그들 상호작용의 다양한 측면을 분리하여 다룸으로써, 최근 기포 수백개의 클러스터를 처음으로 성공적으로 모형화하였습니다. 이 모형의 핵심은 일련의 연결된 미분방정식들을 푸는 것이었는데, 그렇게 하여 연구자들은 구성 요소끼리 여전히 조화롭게 결합될 수 있음을 보장하면서도 문제를 여러가지 구성 요소로 쪼갤 수 있게 되었습니다.

둥근 비눗방울은 표면적을 최소화합니다. 공 모양은 주어진 부피의 공기를 최소 넓이로 둘러싸는 방법입니다. 흔한 방식으로 만나는 두 기포가 동일한 부피의 공 기를 분리하고 둘러싸는 최소 넓이 방법인지 묻는 질문은 “이중 방울 추측”이라 알려진 오랜 미해결 문제입니다. 실제로 그렇다는 것을 보이는 증명은 현대 수학 연구의 패턴을 보여줍니다. 컴퓨터가 관련되고, 학부생을 포함한 많은 사람의 작업이고, 거기서 연구가 끝나지 않습니다. 세 개 이상이면 어떨까요? 똑같지 않은 부피를 둘러싸는 모양은? 또는 더 높은 차원에서는?... 해답이 그냥 떠오른다면 ...

더 알아보기: Multiscale Modeling of Membrane Rearrangement, Drainage, and Rupture in Evolving Foams, Robert I. Saye and James A. Sethian, Science, May 10, 2013.

• 경기 기록표 너머 생각하기

- 아래의 이미지는 NBA의 모든 선수(점으로 표시)의 스타일을 수학적으로 표현한 것입니다. 밝은 색상은 리바운드와 같은 기량에 뛰어난 성과를 의미하고 선분은 여러 가지 기량에서 유사한 성과를 보이는 선수들을 연결합니다. 일반적으로 매우 추상적으로 여겨지는 수학 분야인 위상수학을 통계학과 결합하여 연구자들은 농구팀에 보통의 5개가 아니라 10개의 중요한 포지션이 있음을 보일 수 있었습 니다. 감독이나 팀은 과거에 통했던 것에 집착하여 전통을 선호하는 경향이 있기 때문에 이 혁신적인 접근 방식이 자리를 잡기까지는 시일이 걸릴 수 있습니다. 하지만 오늘날 경기가 이루어지는 방식을 설명하는 이 새로운 정보를 활용하는 것은 슬램 덩크처럼 강력할 것입니다.

일부 감독은 이미 비전통적 라인업의 가치를 알아보았습니다. 양 팀이 동시에 5 명의 가드로 경기할 때도 있는데, 장신의 이점을 살리려는 종목에서

어리석어 보일 수 있습니다. 하지만 실제로는 선수들은 단일 포지션이라는 가드로 구체화되 는 것이 아니라, 예를 들어 점프슛 볼핸들러처럼 다양한 스타일을 드러내며, 키 큰 상대에 맞서서도 상당히 잘 합니다. 또한 선수 선발, 선수의 가치 평가, 라인업 에 적용할 수 있어서 이 연구가 성공할 가능성이 더 있습니다. 팀은 이러한 결과 를 사용하여, 예를 들어 코트에 예상 밖의 5명 조합을 구성하여 가드, 혹은 더 정확히는 점프슛 볼핸들러가 없는 무방비 상태의 상대 팀 을 잡을 수도 있을 것입니다.

더 알아보기: From 5 to 13: Redefining the Positions of Basketball, Muthu Alagappan, 2012.

- 머리 속으로 들어가기
  - 정신은 낭비하기에는 너무 소중할 뿐만 아니라 이해하기에도 극히 어렵습니다. 벡터, 벡터의 일반화인 텐서, 행렬에 의존하는 새로운 영상 기술이 두뇌에 있는 통신 경로에 대해 기본 방법보다 더 많은 정보를 제공합니다. 이는 의사에게 뇌진탕 뿐만 아니라 알츠하이머와 뇌졸중을 포함한 많은 질병과 장애를 더 잘 진단할 수 있게 해 줍니다. 표준 영상 기술은 1차원적 정보만을 수집하지만, 벡터와 행렬 은 뇌 안의 분자의 3차원 움직임을 나타낼 수 있어서 통신 신호가 택하는 경로를 볼 수 있게 합니다.

    새로운 영상 방법은 진단을 보조할 뿐만 아니라 두뇌의 통신 경로의 전체 구조를 이해할 수 있게 도와줍니다. 연구자들은 뒤얽힌 혼잡함이 보일 것으로 예상하였지만, 편미분방정식과 미분기하학을 사용하자 섬유 경로는 구부러지긴 했어도 특 정한 세 방향을 따라 조직된 매우 정밀한 구조를 가졌다는 것을 발견하였습니다. 또한 어쩌면 훨씬 더 놀라운 것은 각 방향이 두뇌 발달의 방향과 일치한다는 사실입니다.

    더 알아보기: Diffusion Tensor Imaging: A New View of the Brain, Dana Mackenzie, Fueling Innovation and Discovery: The Mathematical Sciences in the 21st Century, 2012.

- 자세 조정하기
  - 국제 우주 정거장을 평행 주차해야 할 일은 없지만, 정거장이나 우주선들을 어떤 방 향에서 다른 방향으로 회전하기 위해 정확한 조종으로 움직여야 할 때가 있습니다. 이러한 회전은 3차원 운동과 관련되므로 단순하지 않습니다. 어떤 우주선은 기동 로켓을 사용하는가 하면, 다른 우주선은 자이로스코프나 이와 유사한 장치에 축적 된 각운동량을 사용합니다. 우

주선의 비행 소프트웨어는 보통 (복소수의 확장에 기반한) 사원수 대수를 사용하여 우주선의 방향을 바꿀 경로를 찾는데 필요한 계산을 수행합니다. 무한정 쓸 수 없는 연료와 시간을 최소화하려면 상미분방정식들을 풀어 결정되는 최적의 경로를 찾아야 합니다.

예를 들어 캡슐이 도킹하여 대칭축과 같은 물리적 성질이 변할 때 오류가 발생할 수 있다는 것이 공간에서 정확한 기동을 수행할 때의 또 다른 어려운 점입니다. 최적 추진제 기동이라 부르는 방법은 질량 속성이 변경될 때도 효과가 감소되지 않는다 는 점에서 강력합니다. 이름에서도 알 수 있듯이 이 방법은 로켓을 매우 효율적으로 사용하여, 지난해에만 국제 우주 정거장의 연료 2500파운드와 수백만 달러를 절약하였습니다. 이러한 기동은 선형대수학과 함수 근사로 계산되고 훨씬 적은 추력 발사로 이루어집니다. 이는 우주 정거장에 구조적 하중을 덜 주기 때문에 정거장의 수명을 연장합니다.

더 알아보기: Optimal Propellant Maneuver Flight Demonstrations on ISS, Sagar Bhatt, Nazareth Bedrossian, and Louis Nguyen, 2013.

• 다양한 도시 통합하기
  - 도시들이 상당히 다양함에도 불구하고, 연구자들은 도시의 인구수, 위치, 심지어 시대에 무관하게 전 세계에 걸쳐 성립하는 일반적인 수학적 속성을 발견했습니다. 최근의 이 발견은 수천 개의 도시에서 수집된 데이터와 도시의 사회적, 물리적 측 면에 대한 표준 기하학 및 프랙털 기하학의 응용에 기반을 두고 있습니다. 도시의 크기가 왜 그렇게 가지각색인지 보여주는 이러한 각 속성은 ‘거듭제곱의 법칙’을 따르는 것으로 판명되었는데, 도시가 생성한 특허의 수 또는 도시의 포장도로의 총 길이 등과 같은 양은 도시의 인구의 어떤 거듭제곱을 따라 변한다는 것입니다. 포장도로의 길이는 (인구가 성장함에 따라 새 도로는 상대적으로 더 적게 필요해 서) 1보다 작은 거듭제곱을 취하는 반면, 특허 수는 (상호 작용이 많으면 상대적으로 더 많은 발명에 이르게 하므로) 1보다 큰 거듭제곱을 취합니다.

    다양한 도시 매개 변수를 연관 짓는 법칙들은 인간의 상호 작용, 더 구체적으로는 사회적 연결망 그래프의 속성에 기초하는데, 이들이 필요한 개발 인프라의 기초를 이룹니다. 주어진 인구가 증가하면 창의성은 한층 커지지만, 교통체증과 범죄의 증가라는 원치 않는 결과를 부를 수도 있습니다. 세계가 더 도시화됨에 따라, 연구 자들은 도시들과 그들을 지배하는 수학적

법칙들을 더 잘 이해하여 잠재적인 해로 운 효과에 대응하고 도시의 이익을 확대할 수 있게 되기를 희망하고 있습니다. 이렇게 수학은 유토피아를 보장할 수는 없어도 우리 대부분이 현재 살고 있는 환경을 새롭게 이해하고, 미래 성장을 위해 제안된 전략을 도시 계획자들이 분석하고 결정하는 데 일조 하고 있습니다.

더 알아보기: The Origins of Scaling in Cities, Luís M.A. Bettencourt, Science, June 21, 2013.

제 8 절 산업수학 교과서 학습 내용에 적합한 예들: 응용수학 분야 목차 모음—Princeton Companion to Applied Mathematics

미국 프린스턴 대학이 주도하여 발간한 응용수학 지침서인 Princeton Companion to Applied Mathematics (Higham, 2015)에 소개된 다양한 응용수학 분야 가운데 학교수학과 연계될 수 있다고 생각되는 것을 뽑아 추가하였다. 앞의 COMAP의 내용과 겹치는 것은 수학의 산업에의 활용에서 더욱 기본적인 것이라고 생각할 수 있다.

또한「모델링」절은 현장의 문제에서 수학을 사용하는 대표적인 방법을 열거한 것이다.

응용수학의 분야

- 복소해석
- 상미분 방정식
- 편미분 방정식
- 적분 방정식
- 섭동이론과 점근 해석(asymptotics)
- 변분론
- 특수함수론
- 스펙트럼 이론
- 근사 이론
- 계산 선형대수 및 행렬 이론
- 연속 최적화 (비선형 및 선형 계획법)
- 상미분 방정식의 수치 해법
- 편미분 방정식의 수치 해법
- 확률 해석의 응용
- 역 문제
- 계산 과학
- 데이터 마이닝과 데이터 해석
- 네트워크 해석
- 고전 역학
- 동역학계
- 분기(bifurcation) 이론
- 응용수학에서의 대칭성
- 양자 역학
- random matrix 이론
- 운동론 (kinetic theory)

- 연속체(continuum) 역학
- 패턴 형성
- 유체 역학
- 자기 유체 역학
- 유효 매질 이론 (effective medium theory)
- 고체 역학
- 연성 물질 (soft matter)
- 제어 이론
- 신호 처리 이론
- 정보 이론
- 응용 조합론 및 그래프 이론
- 조합적 최적화
- 대수기하학
- 일반상대론 및 우주론

모델링

- adaptation의 수학
- 스포츠
- inerters
- 수리 생물역학
- 수리 생리학
- 심장 모델링
- 화학 반응론
- 발산 급수론 (taming the tails)
- 금융수학
- portfolio 이론
- 응용수학에서 베이스 추론
- 대칭성을 갖는 구조(framework)의 응용
- granular flow
- 현대 광학
- 수치 상대론 (numerical relativity)
- 전염병의 확산
- 해빙(海氷)의 수학적 이론
- 쓰나미 모델링
- 충격파 이론
- 난기류 (turbulence)

제7장 요약 및 결론

본 연구는 2016년 4월 미래창조과학부에서 발표한 산업 수학 육성방안의 실행방안으로 기획 되었다. 대한수학회는 이와 같은 방안을 구체적으로 실행함으로써 앞으로의 산업수학의 연구 및 산업화에 대한 길라잡이 역할을 하는 것을 목적으로 본 연구를 수행하게 되었다. 위에서 제시된 3개분야 9개 과제의 모든 내용을 활동연구에 담지는 못하였지만 최대한 육성방안의 과제의 구체적 실행을 위하여 연구를 수행하였다.

2장의 전략수립 분야는 산업수학육성방안 2-3, 1-2, 2-2와 연관 지어 질 수 있으며 정부에서 추진하는 산업수학 관련 기획과제의 모형을 제시하고 있다. 먼저 산업수학센터(IMC)에 대학 과제 기획회의를 통하여 운영방안을 마련하였으며 토론회를 통하여 학계와 산업계의 의견을 반영하여 보고서를 작성하였다. 공공 분야 및 전략기술 분야의 공모과제에 대한 기획을 하였다.

산업수학 전문가 pool은 학계에서의 17개 분야 170명의 리스트를 작성하였고 산업계에서는 93명의 전문가들의 목록을 첨부하였다. 이러한 산업수학 전문가 풀은 사업기획 단계에서나 사업 선정과정에서 유용하게 쓰일 수 있을 것으로 기대한다.

3장의 문제발굴 분야(라운드 테이블)의 내용은 산업수학 문제 발굴의 분야의 첫 번째 과제 1-1인 산업현장의 문제 도출과 직접 관련이 있다. 라운드 테이블은 기업에서 수행하고 있는 문제들을 소개하고 이에 대한 수학적 대안을 제시하고 토의하는 형식으로 선진국에서도 진행하고 있는 문제 발굴 모형이다.

네 번에 걸친 문제 발굴회의는 한전 대전 충남 본부, 블리, 아산병원, KT에서 해결하고 싶은 문제들을 중심으로 문제의 소개, 문제의 수학적이해를 통한 아이디어 교환, 새로운 방법론의 제시 등을 통하여 진지하게 진행되었다. 처음으로 시도하는 회의형식이어서 여러 가지 시행착오도 있었으나 큰 틀에서는 보완하여 지속적인 모임을 가지는 것이 유용할 것이라는 결론과 더불어 다음과 같은 시사점을 제시하고자 한다.

- 모더레이터의 필요성: 산업계 연구자와 수학자들과의 간극을 좁혀줄 수 있는 산업수학 모더레이터(Moderator)의 역할이 반드시 필요하다.
- 문제발굴회의의 지속성: 한 번의 회의를 통하여 소통할 수 있는 문제이해의 정도가

제한되어 있어 지속적인 만남과 교류를 통해 산업문제에 대한 깊은 통찰과 이해를 넓혀 나갈 필요가 있다.

- 산업계와의 커넥션 유지: 수학이 산업의 발전에 도움이 될 수 있다는 인식의 확산이 필요한 시점이다. 좀 더 많은 산업에서의 문제발굴을 위하여 적극적인 홍보과 우호적인 관계유지가 필수적이다.
- 전문가 풀의 활용: 많은 수리과학 전문가들이 참여할 수 있도록 여러 가지 제도적 보완 내지는 적절한 운영의 묘를 잘 살릴 필요가 있다.

4장의 문제해결분야(문제 해결 워크숍)의 주요내용은 다음과 같다.

먼저 1차 문제해결 워크샵에서는 제3차 라운드 테이블에서 제시되었던 ‘폐기종 사전 진단’문제에 대한 수학적 접근에 대한 토론이 이루어 졌다. 다소 전문적인 영역에서의 연구 토의를 진행하는 형식으로 진행되었고 활발한 논의가 있었다. 아쉬웠던 점은 추후에 문제해결의 정도를 측정하기가 어려워 일회성 행사로 그치지 않을까 하는 우려가 있었다.

2차 문제해결 워크샵은 1박2일로 부산 해운대에서 열렸는데 타키온 테크와 블리에서 제시된 문제를 먼저 소개 받고 해결하는 일정으로 이루어 졌다. 특히 학생들(학부생, 대학원생)들의 참여가 있었고 국가수리과학연구소의 산업수학 혁신센터의 연구원들이 모더레이터 역할을 맡아 주어 원활하게 워크샵을 진행할 수 있었다.

특히 2차 문제해결 워크샵은 유럽과 오세아니아 그리고 일본 등에서 시행하고 있는 산업수학스터디그룹(MISG)의 진행 형식을 차용한 것으로 한국에서도 이러한 산업 문제해결 플랫폼의 가능성을 엿볼 수 있는 기회였다. 몇 가지 시사점을 다음과 같이 정리했다.

- 일주일정도의 충분한 시간이 필요했다.
- 학생들을 적극적으로 활용하여 여러 방면으로 문제해결을 시도해보는 것이 장기적으로 산업수학의 인력양성이라는 측면에서 바람직하다.
- 문제의 사전공지를 통하여 참석자들에게 문제에 대한 기초지식 또는 관심을 가지게 하는 것이 워크샵의 효율성을 높이는데 도움이 될 것으로 보임.
- 많은 전문가들의 자발적인 참여를 유도할 수 있는 방안이 필요하다.

5장의 산업수학 curriculum에서는 산업수학을 위한 인력양성을 위하여 학부과정과 전문석사과정(PSM)에 대한 사례조사를 수행하였다. 이는 육성방안 3-1에 해당되는 내용이라고 할 수 있다. 또한 산업수학 점화프로그램에서 제시한 각 대학의 교육과정 개편작업에 대한 소개도 포함 시켰다. 국내대학에서의 교육과정 개편작업은

단위학과내서의 어려움과 대학차원에서의 지원여부, 대학원과정의 개설시 학생모집의 어려움 등으로 쉽지 않은 것으로 알려졌다.

이러한 어려움을 극복하기 위해서는 더 많은 산업수학 성공사례들을 창출할 필요가 있으며 산업수학 전공의 학생들을 배출하고 성공적인 진로지도와 산업계로의 진출을 통하여 산업수학 고급 인력의 양성의 가능성을 보여주는 것이 선행되어야 할 것이다.

6장의 교과서 개발 분야(산업수학 교과서)는 산업수학 육성방안 3-3에 관련 지을 수 있다. 일반 교양으로서 필요하다고 생각되는 대학 1학년 정도 수준의 수학이 활용되는 내용을 큰 틀에서 나열한 것이다. 이러한 자료는 산업수학에관련된 과목들을 대학이나 학과에서 개설할 때 기초자료로써 많은 도움이 되리라 기대한다.

참고문헌

가드너 지음, 김한영 옮김 (2008). 미래마인드,재인, 2008.

계보경, 김현진, 서희전, 정종원, 이은환 (2011). 미래학교 체제 도입을 위한 Future School 2030 모델 연구, 한국교육학술정보원, 연구보고 KR 2011-12. www.keris.or.kr/upload/board01/1364968300649_299467606.pdf

고영미, 이상욱 (2010). 구장산술의 방정식론의 교육학적 의미, 한국수학사학회지 23(1) (2010), 25-40.

고영미, 이상욱 (2015). 창조적인 예술로서의 수학 - 헐모시, Proceedings of the Korean Society for History of Mathematics 25(2) (2015), 93-103.

고영미, 이상욱 (2016). 조합수학의 수학교육 내용요소로서의 적합성과 필요성, Journal for History of Mathematics 29(5) (Oct. 2016).

고호경 (2015). 수포자의 발생 원인과 현실 진단, 수학교육총론 제32집, 11-38. 2015년도 제32회 수학교육 심포지엄, 수학교육의 발전적 방향 모색, 2015년 11월 21일, 건국대학교 해봉부동산학관 103호 강당.

교육부 (2014). 2015 문,이과 통합형 교육과정 총론 주요 사항[시안], 교육부 창의인재정책관 (교육과정정책과), 2014. 9.

교육부 (2015a). 산업수요 맞춤형 고등교육 인재양성 방안[시안], 2015. 6., 교육부 (대학정책실).

교육부 (2015b). 「산업수요 맞춤형 고등교육 인재양성 방안」시안 발표, 보도자료 (홍보담당관실, 044-203-6588).

교육부 (2015c). 2015 개정 교육과정 총론 및 각론 확정, 발표, 보도자료(2015. 9.), 교육부 홍보담당관실(044-203-6588).

교육부 (2015). 수학과 교육과정, 교육부 고시 제2015-74호 [별책8], 2015.

교육부 (2016). 2016학년도 수학과 교육과정, 교육부, 2016.

국가수리과학연구소, 산업수학 문제헌터 발대식, 2015년 8월 17일, 한국과학기술회관 아나이스홀(12층), 주최 미래과학창조부, 주관 국가수리과학연구소.

국지영, 평가가 바뀌어야 수업이 바뀐다, 수학과 교육 117(2016년 7-8월), 전국수학교사모임, 22-27.

김명화, 김흥주, 한승희 (1997). 교육지표 개발 및 주기적 교육조사를 위한 기초연구. 한국교육개발원 연구보고 CR97-5.

김선희, 김부미, 안윤경 (2014). 수학의 어려움에 대한 기초 분석 연구, 한국과학창의재단 정책연구 2013-11.

김은영 (사이언스타임즈 객원기자, 2016). '코딩' 가르쳤더니 수학 실력이 '쑥쑥' http://www.sciencetimes.co.kr/?news='코딩' 가르쳤더니 수학 실력이 '쑥쑥' (2016.10.26.)

김영록 외 (2012). 창의적 융합과학기술 IT 인재 양성을 위한 대학 교육과정 연구, 한국과학기술기획평가원 정책연구.

김영욱 (2010). 행렬, 고윳값 그리고 경제학, 수학과 교육, 2010년 5·6월호, p. 57-63.

김영욱 (2011). 운형자, 베지에, 도함수, 수학과 교육 2011년 1·2월호, p. 59-65.

김영욱 외 (2015). 수학학습 내용요소 추출 연구, 한국과학창의재단.

김정희 지음 (2013). 소설처럼 아름다운 수학이야기, 동아일보사, 2013.

김지혜 (2016). 미래세대 과학표준 2017 완성, 사이언스타임즈 (2016.7.17.) http://www.sciencetimes.co.kr/?news=미래세대 과학표준 2017 완성

노선숙, 김영수, 김민경 편저 (2003). 지식기반사회의 수학정보과학 교육과정개발 기초 연구, 이화여자대학교 출판부, 2003. https://books.google.co.kr/books?isbn=8973005278

대한수학회 (2015). 수학교육논총, 제32집, 2015년도 제32회 수학교육 심포지엄, 수학교육의 발전적 방향 모색 (2015년 11월 21일, 건국대학교 해봉부동산학관 103호 강당), 대한수학회.

미국 교육부 (US Department of Education). http://www.ed.gov/stem.

미국 수학·과학 교육. National Math + Science Initiative https://www.nms.org/AboutNMSI/TheSTEMCrisis/STEMEducationStatistics.aspx

미래창조과학부 미래준비위원회 (2015). 미래이슈 분석보고서. http://www.msip.go.kr/web/msipContents/contentsView.do?cateId=mssw311&artId=1271205

미래창조과학부 미래준비위원회 (2015). KISTEP, KAIST 지음, 미래이슈 보고서, 10

년 후 대한민국.

미래창조과학부 (2016a). 산업현장에서 필요한 수학, 정부가 나서서 키운다 -미래부, ‘산업수학 육성방안’ 발표-, 보도자료, 2016.4.27.

미래창조과학부 (2016b). 대한민국 미래 책임질 9대 국가전략 프로젝트 선정, 보도자료, 2016.8.10. https://www.gtp.or.kr/antp/upload/pds/0812_1(1).pdf

미래창조과학부 (2016c). 대한민국 미래를 키우는 ‘국가전략 프로젝트’, 미래이야기 (2016, 9월호). http://www.msip.go.kr/webzine/posts.do?postIdx=216

박경미 외 (2014~2015). 2015 수학과 교육과정 개정 시안 개발 정책 연구, 한국과학창의재단 정책연구.

박희진 (2016). ” 수학, 돈되는 시대” …빅데이터에 몸값 높아진 산업수학 http://m.news1.kr/articles/?2790651

변희연, 권점례, 박선화, 박지현, 이광상, 임혜미, 조윤동, 최승현, 도종훈, 조영미, 채정림 (2013). 미래 사회 대비 국가 수준 교육과정 방향 탐색 - 수학, 교육부, 2013. 발간등록번호: 11-1342000-000028-01. http://www.prism.go.kr/

사교육 걱정없는 세상 웹진(2015). 2015 수학교육과정 개정을 위한 학교 수학교육 관련 설문조사 결과보도(2015.07.22.) http://news.noworry.kr/2414.

상경아 (2014). 국제교육 모니터링 체젝 구축을 위한 학습성과 지표 개발 연구, 한국교육과정평가원.

수리과학 및 데이터 사이언스 교육 강화를 위한 간담회 보고서 (2016)

스티븐 나흐마노비치 저/이상원 역, 놀이, 마르지 않는 창조의 샘(원제 : Free Play), 에코의서재, 2008. http://www.yes24.com/24/goods/3001436?scode=029

영국 교육지원프로그램 (British Council, STEM Education Programme). https://www.britishcouncil.org/education/science/newton/stem-education-programme

영국 기술혁신부 (GOV.UK). Department for Business Innovation & jkills.

영국 케임브리지 대학의 새천년 프로젝트 NRICH 프로그램 http://nrich.maths.org/stemnrich

오채환, 이상욱, 이장주 역 (2014). 세상을 바꾼 방정식 이야기, 사람의 무늬, 2014. (원서: Dana Makenzie (2012). The Universe in Zero Words: The Story of Mathematics as Told through Equations, Princeton University Press.)

위인숙 외 (2008). 이공계 인력의 경쟁력 제고를 위한 수학·과학 교수학습체계 개선 방안, 과학기술부 정책과제.

이만근, 동아일보 지음 (2003). 이만근 교수의 수학 오디세이 1 & 2, 21세기북스, 2013.

이상욱, 고영미, 강미현 옮김 (2008). 하늘책의 증명, 교우사. (원서 M. Aigner, G. Ziegler (1999). Proofs from The BOOK, 3rd edition, Springer.)

이상욱 (2016). Counting is Important for Mathematics Education, Presentation in the International Conference for the 70th Anniversary of KMS, 2016 Annual Meeting, Oct. 20-23, 2016, Seoul National University.

이상욱, 고영미 (2015). 생각과 물질 그리고 수학 - 아티야, Proceedings of the Korean Society for History of Mathematics 25(2) (2015), 81-91.

이철재 (2016). 수학 문제를 풀 때 당신의 뇌 속에선, 중앙일보, 2016.7.30. http://news.joins.com/article/20378961

이환철 (2015). 수포자 문제 해결을 위한 지원책 모색, 수학교육총론 제32집, 79-96. 2015년도 제32회 수학교육 심포지엄, 수학교육의 발전적 방향 모색, 2015년 11월 21일, 건국대학교 해봉부동산학관 103호 강당.

일본 문부과학성,『대학의 수리·데이터 사이언스 교육 강화방안에 대하여(大學の數理·デ□タサイエンス教育强化方策について)』, 2016.

조벽 (2010). 조벽 교수의 인재혁명, 해냄출판사.

정보통신기술센터 (2016). 주요 선진국의 제4차 산업혁명 정책동향, 해외 ICT R&D 정책동향 2016-04호. www.next-it.co.kr/board/actFileDown.html?Thread=388. 한국정보화진흥원, 인더스트리 4.0과 제조업 창조경제 전략, IT & Future Strategy 제2호 (2014). www.nia.or.kr/

조선일보 (2015). 수학자들, 산업현장 뛰어든다, 조선일보(2015. 8. 18.)

지형철 (2016). 몰려오는 4차 산업혁명…우리는?, KBS News (2016.11.1.). http://news.kbs.co.kr/news/view.do?ncd=3371132

최수일 (2015). 우리나라의 수포자 실태 및 현황, 수학교육총론 제32집, 41-75. 2015년도 제32회 수학교육 심포지엄, 수학교육의 발전적 방향 모색, 2015년 11월 21일, 건국대학교 해봉부동산학관 103호 강당.

최양희 (2016). 산업수학 육성방안(안), 국가과학기술심의회 운영위원회, 2016.4.27.

최지선, 상경아 (2015), 국제 공통의 초등수학 내용요소 추출, 대한수학교육학회지 <학교수학> 제 17권 제 1호, 119~134

한국고용정보원의『국내외 직업 비교 분석을 통한 신 직업 발굴 연구』및『미래 일자리

세계의 변화』(2015)

황혜정, 나귀수, 최승현, 박경미, 임재훈, 서동엽 (2016). 수학교육학신론, 개정증보판, 문음사.

American Association for the Advancement of Science, Benchmarks for Science Literacy, Project 2061, Oxford University Press, New York, 1993.

Australian Academy of Science (2016). The mathematical Sciences in Australia – A vision for 2025.

Melanie Arntz, Terry Gregory, and Ulrich Zierahn, "The Risk of Automation for Jobs in OECD Countries: A Comparative Analysis," OECD Social, Employment and Migration Working Papers No. 189, 2016. (http://www.oecd-ilibrary.org/social-issues-migration-health/the-risk-of-automation-for-jobs-in-oecd-countries_5jlz9h56dvq7-en;jsessionid=do9rahf3578i7.x-oecd-live-02

Michael F. Atiyah (2014). Mind, Matter, and Mathematics, in Michael Atiyah's Collected Works Volume 7, 2002-2013, Oxford University Press, 2014, 269-281. https://edoc.bbaw.de/files/23/09_Atiyah.pdf.

Jeremy Avigad (2015). Mathematics and Language, arXiv:1505.07238vs [math.HO] 21 Aug 2015. In Ernest Davis, Pillip J. Davis (eds.) (2015), Mathematics, Subtances and Surmise: Views on the Meaning and Ontology of Mathematics, Springer, 235-256. ISBN 978-3-319-21472-6, DOI 10.1007/978-3-319-21473-3.

William Byers (2007). How Mathematicians Think, Princeton University Press, 2007. http://press.princeton.edu/titles/8386.html

Jonathan M. Borwein (2013). The Future of Mathematics: 1965 to 2065, Prepared for MAA Centenary Volume, 2015.

John D. Bransford, Ann L. Brown, and Rodney R. Cocking, editors (2004). How People Learn: Brain, Mind, Experience, and School, Commission on Behavioral and Social Sciences and Education, Committee on Developments in the Science of Learning, National Research Council, National Academy of Sciences, NATIONAL ACADEMY PRESS, Washington, D.C., 2004. (Introduction).

Peter J. Cameron (2001). Combinatorics entering the third millennium, draft

(2001). http://www.maths.qmul.ac.uk/~pjc/preprints/histcomb.pdf

Benedict Carey (2016). What your brain looks like when it solves a math problem, New York Times, 2016.7.28. http://www.nytimes.com/2016/07/29/science/brain-scans-math.html?_r=0

Jean-Pierre Changeux and Alaine Connes (1996). Conversations on Mind, Matter, and Mathematics, Princeton University Press.

Francis S. Collins, The Language of God, Free Press, 2007. 이창신 옮김, 신의 언어, 김영사, 2010.

COMAP (2016). For All Practical Purposes (10th Ed.), W. H. Freeman & Co., New York.

Delphian School (2014). Student & Parent Handbook, Delphian School, 2014.

Keith Devlin (2012). What will count as mathematics in 2100? https://web.stanford.edu/~kdevlin/Papers/Math_in_2100.pdf

C-h. Chen, W. Härdle, A Unwin (2008). Handbook of Data Visualization, Springer, 2008.

Charles Lincoln Van Doren (2010). A History of Knowledge: Past Present, and Future. 박중서 옮김, 지식의 역사: 과거, 현재 그리고 미래의 모든 지식을 찾아, 갈라파고스, 2010.

COMAP (2002). Precalculus: Modeling Our World (p. 19), W. H. Freeman and Co., New York.

COMAP (2016). For All Practical Purposes-Mathematical Literacy in Today's World, 10th Ed., W. H. Freeman & Co.

Eichenbaum, H. (2012). The cognitive neuroscience of memory: An introduction (2nd ed.). Oxford University Press, England.

Engquist, Bjorn, Schmid (Eds.) (2001). Mathematics Unlimited - 2001 and Beyond, Springer, 2001. http://www.springer.com/la/book/9783642631146

Executive Office of the President (2016). Artificial Intelligence, Automation, and the Economy, National Science and Technology Council.

Executive Office of the President (2016). Preparing for the Future of Artificial Intelligence, National Science and Technology Council.

Carl Frey and Michael Osborne, "The Future of Employment: How Susceptible are

Jobs to Computerization," Oxford University, 2013. (http://www.oxfordmartin.ox.ac.uk/downloads/academic/The_Future_of_Employment.pdf)

Howard Gardiner (2006). Five Minds for the Future, Harvard Business Press, Boston, MA, 2006.

Howard Gardiner (2007). 하워드 가드너 저/문용린 등역, 다중지능, 웅진지식하우스, 2007. http://www.yes24.com/24/goods/2692134?scode=029

Timothy Gowers (Ed.) (2008). The Princeton Companion to Mathematics, Princeton University Press. 금종해 외 옮김 (2015). 승산.

이승용 (2011). KISTEP 선정 과학기술분야 유망 신직업군, KISTEP.

Solomon Garfunkel, Landy Godbold, Henry Pollak (2010). Mathematics, Modeling Our World (2nd ed.), COMAP.

Lynda Gratton and David A. Smith (Mar. 2016). A Future That Works.

Paul R. Halmos (1968). "Mathematics as a Creative Art", American Scientist 56 (1968), 375-389. http://math.slu.edu/~srivastava/Halmos.pdf.

Nicholas J. Higham (Ed.) (2015). The Princeton Companion to Applied Mathematics, Princeton University Press, 2015.

Michio Kaku (2015). The Future of the Mind, Anchor, 2015. 박병철 옮김, 마음의 미래, 김영사, 2015.

Saul A. Kripke (1982). Wittgenstein on Rules and Private Language: An Elementary Exposition, Harvard University Press, 1982.

George Lakoff, Rafael E. Núñez (2000). Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being, Basic Books, 2000. http://www.cogsci.ucsd.edu/~nunez/web/FM.PDF, http://www.cogsci.ucsd.edu/~nunez/web/INTR-04.PDF

Christian Lenart, The Many Faces of Modern Combinatorics, preprint. http://www.albany.edu/~lenart/articles/combin1.pdf

LMTF (2013a). Toward universal learning: What every child should learn. Report No.1 of the Learning Metrics Task Force. Montreal and Washington, DC.: UNESCO Institute for Statistics and Center for Universal Education at the Brookings Institution. Retrieved March31, 2014 from http://www.brookings.edu/about/centers/universal-education/lear ning-metrics-task-force/media/56D69BF9960F4442864F28AE28983248.ashx

LMTF (2013b). Toward universal learning: A global framework for measuring learning. Report No.2 of the Learning Metrics Task Force. Montreal and Washington, DC: UNESCO Institute for Statistics and Center for Universal. Retrieved March31, 2014 from http://www.uis.\unesco.org/Education/Documents/towards-universal-learning-a-global-framework-for-mea\suring-learning-metrics-task-force-education-2013-en.pdf

Laszlo Lovasz, One Mathematics. http://www.cs.elte.hu/~lovasz/berlin.pdf

Yuri Ivanovitch Manin, Ronald Wengenmayr (2009). The Tool of Knowledges, Max Planck Research 1 (2009), 52-57.

MATHEON (2008). Mathematics is the Future, DFG Research Center MATHEON: Mathematics for Key Technologies, 2008. www.matheon.de.

David R. Mazur (2010). Combinatorics: A Guided Tour, MAA Textbooks, 2010. http://www.maa.org/publications/books/combinatorics-a-guided-tour

Andreas Moritz (2007). Timeless Secrets of Health & Rejuvenation, 4th edition/Revision, Electronic book (Nov., 2007). ISBN: 978-0-9792757-6-0. xa.yimg.com/kq/groups/.../16300340-Timeless-Secrets-of-Health-Rejuvenation.pdf

Tim Morthland (2015). American Higher Learning's Classical Tradition, Veritas (Fall 2015), Morthland College.

National Research Council (2010). Report of a Workshop on the Scope and Nature of Computational Thinking, The National Academic Press.

National Research Council (2013). The Mathematical Sciences in 2025, The National Academic Press.

National Research Council (2015). Fueling Innovation and Discovery: The Mathematical Sciences in the 21st Century, The National Academic Press.

OECD (2005). The Definition and Selection of Key Competencies.

Peter R. Orszag (2006). Warm Hearts and Cool Heads: Promoting Growth and Opportunity in a Globalizing Economy, APEC Symposium on SocioEconomic Disparity, Speech | June 29, 2006. http://www.brookings.edu/research/\speeches/2006/06/29globaleconomicsorszag.

Alan H. Schoenfeld (2010). How We Think: A Theory of Goal-Oriented Decision Making and Educational Applications, Routledge, Oct. 2010. https://www.amazon.com/How-Think-Goal-Oriented-Applications-Mathematical/dp/0415878659

Klaus Schwab (2016). The Fourth Industrial Revolution, World Economic Forum, 2016. https://www.amazon.com/dp/B01AIT6SZ8, http://www3.weforum.org/docs/Media/KSC_4IR.pdf

Anna Sfard, Thingking as Communicating—Human Development, the Growth of Discourses, and Mathematizing, Cambridge University Press, 2008.

Siu Man Keung (2016). "Problem of Seven Light Bulbs – Some reflection on popularization of mathematics, entertainment versus the underlying mathematics", 2016, personal communication.

Arne B. Sletsjøe (2012). Abel Prize Laureate 2012: Endre Szemerédi, Combinatorics. http://www.abelprize.no/c54147/binfil/download.php?tid=54123

Robert J. Sternberg (1999). "Successful intelligence: finding a balance", Trends in Cognitive Sciences 3(11) (1999), 436-442.

Francis Edward Su (2010). "Teaching Research: Encouraging Discoveries", The American Mathematical Monthly 117(9) (2010), 759-769. https://www.math.hmc.edu/~su/leitzel/leitzel.pdf

Rachel Thomas (2004). "Millennium Mathematics Project: Bringing mathematics to life", MSOR Connections 4(3) (2004), 7-10. https://www.heacademy.ac.uk/system/files/msor.4.3g_1.pdf

John Thomasian (2011). Building a Science, Technology, Engineering, and Math: Education Agenda, An Updated of State Actions, NGA Center for Best Practices (December 2011), National Governors Association.

Denisse R. Thompson (2016). "Reasoning, Proof and Justification", Presentation in the International Conference for the 70th Anniversary of KMS, 2016 Annual Meeting, Oct. 20-23, 2016, Seoul National University.

Bernie Trilling and Charles Fadel (2009). 21st Century Skills: Learning for Life in Our Times, John Wiley & Sons.

University of Cambridge. NRICH Program in the Millennium Mathematics Project. University of Cambridge http://www.cam.ac.uk.nrich.maths.org/stemnrich

Antony Unwin, Martin Theus, Heike Hofmann (2006). Graphics of Large Datasets: Visualizing a Million, Springer, 2006.

U.S. Department of Education, Science, Technology, Engineering and Math: Education for Global Leadership. http://www.ed.gov/stem

Peter Watson (2009). A Terrible Beauty: The People and Ideas That Shaped the Modern Mind. 남경태 역, 생각의 역사 1, 2, 들녘, 2009.

Eugene Wigner (1960). "The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences", Pure and Applied Mathematics 13(1) (1960), 1-14. http://math.northwestern.edu/~theojf/FreshmanSeminar2014/Wigner1960.pdf

Robin Wilson (2016). Combinatorics, A Very Short Introduction, Oxford University Press, 2016.

Jeannette M. Wing, "Computational Thinking", Communications of the ACM, Vol. 49, No. 3, March 2006, pp. 33-35.

Jeannette M. Wing, Computational Thinking: What and Why?, 2010 (http://www.cs.cmu.edu/~CompThink/resources/TheLinkWing.pdf).

World Economic Forum (2016). The Future of Jobs - Employments, Skills and Workforce Strategy for the Fourth Industrial Revolution, WEF(2016.1.18.).

Mathematics. https://en.wikipedia.org/wiki/Mathematics.

Mathematical Moments. http://www.ams.org/samplings/mathmoments/mathmoments.

Johann Heinrich Pestalozzi. https://en.wikipedia.org/wiki/Johann_Heinrich_Pestalozzi.

Pareto Principle. https://en.wikipedia.org/wiki/Pareto_principle.

Vilfredo_Pareto. https://en.wikipedia.org/wiki/Vilfredo_Pareto.

Wikipedia, The Delphian School. https://en.wikipedia.org/wiki/The_Delphian_School

Wikipedia, How to Solve It. https://en.wikipedia.org/wiki/How_to_Solve_It

Wikipedia, The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences. http://math.northwestern.edu/~theojf/FreshmanSeminar2014/Wigner1960.pdf

부록: 실용수학 교재개발 분야

실제 산업현장에서 발생하는 문제들은 단순히 몇 개의 변수로 콘트롤 될 수 없는 훨씬 복잡한 상황을 수반하는 경우가 대부분이나, 산업수학을 시작하는 학생들이 산업수학의 본질과 효율성을 이해하고 수월하게 학습하기 위해 수학적으로 비교적 잘 표현되고 정리된 문제부터 훈련하는 것이 필요하다. 이러한 학생들의 초 기 학습에 걸맞은 산업수학 프로젝트 문제 개발이 중요한데, 교수가 실제 산업현 장에서 발생하는 문제들을 변수를 단순화하여 팀 프로젝트 문제로 만들 수 있다. 혹은 학생들이 산업현장을 견학하면서 가상의 문제를 스스로 만들 수도 있겠다. 제시된 문제에 대하여 학생들은 다양한 해결방법을 제시할 수 있고, 같은 프로젝 트 문제를 부여받은 팀들 간에 해법을 비교하면서 스스로의 문제점을 인식할 수 도 있다. 웹사이트 https://web.wpi.edu/academics/math/CIMS/IMPHSS/projects.html에서 아래의 두 개 샘플 문제를 발췌한다.

제 1 절 샘플 문제 1. 세라믹 콘덴서 제조

1) 프로젝트 개요

세라믹 콘덴서 제조 업체들은 동일한 사이즈의 동일한 전기적 성질을 가지는 수백만 개의 세라믹 콘덴서를 가능한 최소한의 비용으로 생산해야 한다. 따라서 생산량과 이익을 극대화하도록 제조 과정을 최적화할 필요가 있다. 이러한 목적을 달성하기 위하여, 본 프로젝트는 세라믹 콘덴서의 제조 과정에 관한 변수 중 일부를 어떻게 결정하냐에 관한 것이다.

2) 배경 정보 개요

세라믹 콘덴서 제조 과정은 제어되어야 하는 여러 단계로 구성된다. 실제로 제조공학자들은 가장 경제적이고 효율적인 제조 과정을 위하여 어떻게 변수들을 결정하느냐에 관하여 고민한다. 세라믹 콘덴서는 다음과 같은 단계를 거치면서 생산

된다.

- 세라믹 가루와 유기결합재를 혼합하여 “greenware (생바탕)” 를 폭 1m 길이 100m의 긴 테이프 모양으로 주조한다. 이 greenware 테이프는 획일적으로 13cm의 두께로 제작된다.
- 이 greenware 테이프가 전도성을 가지게 하기 위하여, 전도성 잉크로 윗면과 아랫면을 칠한다.
- 전도성 잉크로 칠해진 greenware 테이프들은 차곡차곡 쌓아서 두께가 1cm가 되도록 압축시킨다. 그런 다음 그 압축된 덩어리를 가로 세로가 각각 50cm 가 되도록 블록 모양으로 자른다.
- 이 50cm × 50cm 블록 모양의 덩어리를 계속 움직이는 컨베이어 벨트 위에 얹어서 일련의 오븐들을 순서대로 통과하면서 가열 과정을 거친다. 오븐을 통과하는 동안 다음과 같은 일이 일어난다.
- 유기결합재는 50cm × 50cm 블록 모양의 덩어리에서 서서히 빠져나간다.
- 유기결합재가 다 빠지고 난 뒤 남아있는 부분의 세라믹 가루는 최종적으로 단단한 세라믹 재질로 소결된다.
- 소결된 덩어리를 실내 온도에서 식힌다.
- 이 가열 과정에서 블록 모양의 덩어리들은 16% 수축이 일어난다.
- 섭씨 20도로 식힌 덩어리를 콘덴서의 최종 사이즈인 가로 세로 각각 0.1cm 이고 두께가 0.5cm인 작은 블록 모양으로 자른다.
- 사이즈가 가로 세로 모두 아주 작은 덩어리를 가열시키는 과정은 불안정하 므로, 가열 과정을 거치기 전에 압축된 greenware 덩어리를 최종 사이즈인 0.1cm × 0.1cm × 0.5cm로 작게 잘라서는 안된다. 단, 가로나 세로 한 사이즈 만 작은 경우는 안정적으로 가열 과정을 거칠 수 있다.

3) 상세한 배경 정보

세라믹 콘덴서의 가열 과정은 일련의 오븐을 연속적으로 통과하는 컨베이어 벨트 위에 압축된 greenware 덩어리를 얹는 것부터 시작된다. 압축된 greenware 덩어리는 계속해서 벨트 위에 얹히고, 덩어리와 덩어리 사이의 간격은 2.5cm 미만이다. 이 덩어리는 각 길이가 10m인 오븐 100개를 연속적으로 통과해야 한다. 100개 의 각 오븐에는 조절기가 있어 개별적으로 각 오븐의 온도를 맞출 수 있고 한 오 븐의 온도는 일정하다. 오븐의 온도는 섭씨 1500도까지 올릴 수 있고 심지어 끌 수도 있다.

가. 가열 과정에서 있어서의 한계

1. 압축된 greenware 덩어리가 가열 과정 (유기결합재가 빠져나가고 소결되고 실온으로 식히는 모든 과정)에 걸리는 시간은 최대 48시간이다.
2. 만약 유기결합재가 너무 빨리 퍼져나가면 압축된 greenware 덩어리에 거품 을 일으켜서 파열된다. 따라서 유기결합재의 제거 과정에는 최소 40시간은 걸려야 한다.
   a) 가열 과정에서 유기결합재는 압축된 greenware 덩어리에서 수평 방향 으로 만약 0.02cm/hr 속도로 퍼져나간다. 전도성 잉크가 입혀져 있기 때문에 수직 방향으로는 퍼질 수 없다.
   b) 유기결합재는 섭씨 60도와 150도일 때 가장 잘 퍼져나간다. 따라서 압축된 greenware 덩어리는 섭씨 60도와 150도에서 각각 최소 10시간씩 은 유지되어야 한다.
3. 소결되기 위한 최고 온도는 섭씨 1200도이고, 그 온도에서 최소 2시간 동안 은 유지되어야 한다.
4. 소결된 후, 덩어리를 섭씨 20도의 실온으로 식히는 데는 최소 2시간이 필요하다.
5. 오븐의 온도를 섭씨 150도 시작 지점에서 1200도로 올리는데 걸리는 시간은 길수록 좋다.

나. 제조 과정에 있어서의 한계

만약 압축된 greenware 덩어리를 가열 과정 전이나 혹은 이후에 자른다면, 매번 자를 때마다 0.1cm의 손실이 발생한다.

4) 생각할 문제

문제 1 사용가능한 콘덴서의 최대 개수를 생산하기 위하여 가열 과정에서 100개의 오븐을 연속적으로 통과하는 컨베이어 벨트 위에 놓이는 압축된 greenware 덩어리의 가장 적절한 크기를 구해보자. (즉, 현재의 생산 방법으로는 50cm × 50cm 크기의 압축된 greenware 덩어 리가 컨베이어 벨트 위에 놓이는데, 효율성에 문제가 없는지 고민해보자.)

문제 2 가장 적절한 컨베이어 벨트의 속도를 구해보자.

문제 3 가열 과정에서 100개의 각 오븐의 온도를 어떻게 설정하는 것이 가장 적 절할지 토의해보자.

문제 4 가열 과정을 거치기 전의 50cm x 50cm 크기의 압축된 greenware 덩어리 하나로부터 최대 개수의 콘덴서를 생산할 수 있는 방법에 관해 토의해보 고, 이 때 생산되는 콘덴서의 개수를 구해보자.

제 2 절 샘플 문제 2. 콘덴서용 세라믹 가루

1) 프로젝트 개요

세라믹 콘덴서 (전하를 유지하는 장치)를 제조하는 과정에서 제일 처음 할 일은 제조 과정에서 사용될 세라믹 가루를 만들기 위하여 원자재를 혼합하는 것이다. 합성된 세라믹 가루와 유기 결합재를 섞어서 긴 테이프 모양으로 greenware (생바탕)를 주조한다. 이 greenware 테이프를 주조할 때 세라믹 가루에 유기결합재를 첨가하는 것은 마치 시멘트를 붓기 위해서 시멘트 가루에 물을 첨가하는 것과 비슷하다. 다 마르고 나면 greenware 테이프는 13cm의 일관된 두께를 가지게 된다. 그런 다음 금속 잉크로 greenware 테이프를 코팅하는데, 그렇게 함으로써 greenware 테이프는 전도성을 가지게 된다. 그 greenware 테이프를 여러 겹 쌓아 서 압축한 후, 일정한 크기의 덩어리로 잘라서 컨베이어 벨트 위에 놓아서 수십 개의 오븐을 통과시킨다. 그 과정에서 유기결합재는 서서히 빠져나가고 남아있는 세라믹 가루는 단단한 재질의 고체 세라믹 자재가 된다. 이 고체 세라믹 자재를 작게 잘라서 최종 사이즈의 세라믹 콘덴서를 만든다. 본 프로젝트는 세라믹 가루 의 제조 과정에서 생기는 몇 개의 변수를 결정하여 가장 효율적으로 세라믹 콘덴 서를 제조하는 것에 관한 것이다.

2) 배경 정보

- 큰 용기에 세 개의 원자재 X, Y, Z를 $10:3:1$의 무게 비중으로 혼합한다.
- 이 섞여진 20kg 혼합물을 섭씨 600도의 오븐에서 8시간 동안 가열시켜 XYZ를 만든다.
- 만들어진 XYZ는 분필과 같은 밀도를 갖는다. XYZ를 30kg 단위로 나누어 작 은 크기의 입자를 얻기 위해 4시간 동안 분쇄기를 이용하여 가루로 빻는다.
- 가루가 된 입자 중 85% 가량은 통과되고, 통과되지 못한 재료는 적당한 크 기가 되도록 다시 빻는다.
- 잘게 빻아진 세라믹 가루에 유기결합재를 $8:1$(= 가루: 유기결합재)의 무게 비중이 되게 하여 믹서기를 이용하여 8시간 동안 섞는다. 그런 이후에 이 반죽 을 부어

긴 테이프 모양의 greenware(생바탕)를 주조한다. greenware 테이프 한 더미를 만드는데 세라믹 가루는 2.5kg 필요하다. 24시간 동안 1,000개의 greenware 테이프 더미를 만든다. 공정 엔지니어는 설령 문제(즉, 혼합하는 기계나 오븐이 고장이 난다거나 원자재나 유기결합재를 싣고 오는 배가 하 루정도 늦게 도착한다든가 하는 문제)가 생기더라도 생산 중단 없이 24시간 공장을 가동시킬 수 있는 충분한 세라믹 가루를 확보하고 싶어 한다.

3) 프로젝트 목표

24시간 연속적으로 공장이 가동되어 효율적으로 세라믹 가루를 만들기 위하여, 원 자재와 유기 결합재의 양, 원자재를 섞는 믹서기의 개수, 오븐의 개수, 분쇄기의 개수, 그리고 세라믹 가루와 유기결합재를 혼합하여 만드는 greenware 테이프의 개수 등을 결정하여야 한다.

가. 제조 과정에 있어서의 한계

1. 원자재 X, Y, Z와 유기결합재는 일주일 동안 연속적으로 공장을 가동시키기에 충분한 양이 준비되어야 한다.
2. 일주일 동안 연속적으로 공장을 가동시키기에 충분한 개수의 기계들(믹서기, 오븐, 분쇄기, 세라믹 가루와 유기결합재를 섞는 믹서기)이 준비되어야 한다.
3. 입자를 잘게 빻는 과정에서 15% 정도는 입자의 크기가 충분히 작게 빻아지지 않으므로 다시 빻는 과정을 거쳐야 한다.
4. 각 기계의 수리는 한 작동주기(예를 들면, 오븐의 경우는 8시간) 내에 이루어질 수 있다.
5. 모든 단계에 걸리는 시간은 지켜져야 한다.

4) 생각할 문제

문제 1 연속적이고 효율적인 생산 과정이 이루어지기 위해서 일주일 분량으로 준비해야 할 원자재 X, Y, Z의 각 양을 결정하여라.

문제 2 연속적이고 효율적인 생산 과정이 이루어지기 위해서 일주일 분량으로 준비해야 할 유기결합재의 양을 결정하여라.

문제 3 매일 1,000개의 greenware 테이프 더미를 만들기 위하여 필요한 것들의 개수를 각각 결정하여라.

1. 원자재를 섞는 믹서기의 개수,

2. 오븐의 개수,

3. 분쇄기의 개수,

4. 세라믹 가루와 유기결합재를 섞는 믹서기의 개수

(이 때 주의 할 점은 각 기계는 5% 정도의 비율로 고장나고, 고장난 기계는 한 작동 주기 내에 수리되어진다.)